



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής και Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Σχεδίασης Μικροηλεκτρονικών Κυκλωμάτων

Μαθηματική Ανάλυση ΣΔ Διαμορφωτών και εφαρμογές στη Σύνθεση Συχνότητας και στο Στοχαστικό Φιλτράρισμα

Διπλωματική Εργασία

του

Αναστασίου Δ. Βλάχου

Επιβλέπων: Παύλος Π. Σωτηριάδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάιος 2021



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής και Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Σχεδίασης Μικροηλεκτρονικών Κυκλωμάτων

Μαθηματική Ανάλυση ΣΔ Διαμορφωτών και
εφαρμογές στη Σύνθεση Συχνότητας και στο
Στοχαστικό Φιλτράρισμα

Διπλωματική Εργασία

του

Αναστασίου Δ. Βλάχου

Επιβλέπων: Παύλος Π. Σωτηριάδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 31^η Μαΐου 2021:

.....
Παύλος Π. Σωτηριάδης
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Ιωάννης Κομίνης
Επίκουρος Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Αθανάσιος Παναγόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάιος 2021

.....
Αναστάσιος Δ. Βλάχος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών, Ε.Μ.Π.

Copyright © Αναστάσιος Δ. Βλάχος, 2021.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στόχος αυτής της εργασίας είναι η μαθηματική μελέτη των $\Sigma\Delta$ Διαμορφωτών και η παρουσίαση εφαρμογών αυτών σε 2 πεδία: στο πεδίο της σύνθεσης συχνότητας και στο πεδίο του ψηφιακού στοχαστικού φιλτραρίσματος. Αρχικά, μελετάμε τους $\Sigma\Delta$ Διαμορφωτές με σταθερή είσοδο από την σκοπιά των τμηματικά συνεχών απεικονίσεων και εξάγουμε συμπεράσματα για την περιοδικότητα αυτών. Στη συνέχεια, δείχνουμε το πώς μπορούν οι $\Sigma\Delta$ Διαμορφωτές να χρησιμοποιηθούν σε εφαρμογές σύνθεσης συχνότητας και παρουσιάζουμε τεχνικές μεγιστοποίησης της περιοδικότητάς τους, ώστε αυτή η χρήση τους να είναι αποδοτική. Τέλος, παρουσιάζουμε ένα σχήμα ψηφιακής επεξεργασίας σήματος, το οποίο βασίζεται σε $\Sigma\Delta$ Διαμορφωτές και σε τεχνικές Stochastic Computing, και παρουσιάζουμε τα οφέλη του συνδυασμού αυτών των δύο μεθόδων. Όλα τα θεωρητικά συμπεράσματα αυτής της εργασίας συνοδεύονται και από αποτελέσματα προσομοιώσεων που έγιναν σε περιβάλλον Matlab.

Λέξεις Κλειδιά: $\Sigma\Delta$ Διαμορφωτές, τμηματικά συνεχείς απεικονίσεις, περιοδικότητα, χάος, σύνθεση συχνότητας, ψηφιακή επεξεργασία σήματος, stochastic computing

Abstract

The main goal of this thesis is the mathematical analysis of $\Sigma\Delta$ modulators and the presentation of two fields where they can be applied to: the field of frequency synthesis and the field of digital stochastic filtering. Firstly, we study $\Sigma\Delta$ modulators with constant inputs from the scope of piecewise continuous mappings and we draw conclusions about their periodicity. Furthermore, we show how $\Sigma\Delta$ modulators can be used in applications of frequency synthesis and we present techniques in order to maximize their periodicity, so that they can be used optimally in frequency synthesis applications. Finally, we present a digital signal processing scheme, that is based on $\Sigma\Delta$ modulators and Stochastic Computing techniques, and we present the benefits of the combinations of these two methods. All theoretical results of this thesis are accompanied by simulation results that were carried out using Matlab.

Keywords: $\Sigma\Delta$ modulators, piecewise continuous mappings, periodicity, chaos, frequency synthesis, digital signal processing, stochastic computing

Ευχαριστίες

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία σηματοδοτεί την ολοκλήρωση των προπτυχιακών μου σπουδών. Με την ολοκλήρωση αυτής αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τα άτομα τα οποία στάθηκαν δίπλα μου σε αυτό το μονοπάτι της ζωής μου.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Παύλο Πέτρο Σωτηριάδη, που από την πρώτη στιγμή μου έδειξε εμπιστοσύνη, με παρακινούσε συνεχώς να δουλέψω σκληρά και με στηρίζει στα μελλοντικά μου σχέδια. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον υποψήφιο διδάκτορα Νίκο Τέμενο, του οποίου η συμβολή ήταν διαρκής και καθοριστική, χωρίς την οποία δεν θα ήταν δυνατή η ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου, για τις όμορφες στιγμές που περάσαμε μαζί και για τη συμπαράστασή τους.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την απέραντη ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου, και συγκεκριμένα στους γονείς μου Μαρία και Δημήτρη, για όλα όσα μου έχουν προσφέρει και για τη στήριξή τους σε κάθε βήμα μου.

Αναστάσιος Δ. Βλάχος
Μάιος 2021

Περιεχόμενα

Περίληψη	3
Abstract	4
Ευχαριστίες	5
Ευρετήριο Εικόνων	8
Κατάλογος Πινάκων	11
1 Εισαγωγή	12
2 Βασικές πληροφορίες για τους Σίγμα-Δέλτα (ΣΔ) Διαμορφωτές	15
2.1 ΣΔ Διαμορφωτές 1 ^{ης} τάξης	15
2.2 ΣΔ Διαμορφωτής 2 ^{ης} τάξης	17
2.3 ΣΔ Διαμορφωτές Υψηλότερης Τάξης	19
2.4 Πολυσταδιακοί ΣΔ Διαμορφωτές	21
2.5 Τοπολογία Ανάδρασης Σφάλματος (Error-Feedback)	23
3 Μαθηματική Ανάλυση ΣΔ Διαμορφωτών	24
3.1 Εισαγωγή	24
3.2 Ανάλυση MOD1	24
3.2.1 Μαθηματικό Υπόβαθρο	24
3.2.2 Ανάλυση της δυναμικής του ιδανικού MOD1	27
3.2.3 Δομή των περιοδικών ακολουθιών εξόδου	29
3.2.4 Μη ιδανικός MOD1 και ανάλυση της δυναμικής του	30
3.3 Ανάλυση ΣΔ Διαμορφωτών Υψηλότερης τάξης	34
3.3.1 N-οστής τάξης ΣΔ Διαμορφωτής (MODN)	34
3.3.2 Αποτελέσματα για τον MOD2	39
3.3.3 Αποτελέσματα για τον MOD3	42
3.4 Ανάλυση Error-Feedback τοπολογιών	43
3.4.1 Ανάλυση EFM1	43
3.4.2 Ανάλυση MASH EFM υψηλότερης τάξης	46

4	Τεχνικές σύνθεσης συχνότητας με χρήση ΣΔ Διαμορφωτών	49
4.1	Εισαγωγή	49
4.2	Βασικά στοιχεία θεωρίας για PLL και frequency synthesizers με PLL	50
4.2.1	Βρόχος κλειδωμένης φάσης PLL	50
4.2.2	Ακέραια σύνθεση συχνότητας	50
4.2.3	Κλασματική σύνθεση συχνότητας	51
4.3	Σφάλμα κβαντισμού	53
4.4	Στοχαστικές Τεχνικές - Dithering	54
4.5	Ντετερμινιστικές Τεχνικές - Επίδραση της εισόδου και των αρχικών συνθηκών στον θόρυβο κβαντισμού	59
4.6	Τροποποιημένες τοπολογίες ΣΔ Διαμορφωτών	66
4.6.1	Τροποποιημένη τοπολογία EFM1	66
4.6.2	EFM με modulus πρώτο αριθμό	69
5	Ψηφιακό Φιλτράρισμα βασισμένο σε ΣΔ Διαμορφωτές και τεχνικές Stochastic Computing	73
5.1	Εισαγωγή	73
5.2	Θεωρία Stochastic Computing	74
5.2.1	Παραγωγή στοχαστικών ακολουθιών και αναπαράσταση αριθμών	74
5.2.2	Αριθμητικές Πράξεις	75
5.3	Προτεινόμενο MOD1-SC σχήμα DSP	76
5.3.1	Ψηφιακή Αναπαράσταση MOD1	76
5.3.2	Στοχαστικό FIR φίλτρο	77
5.3.3	Παραγωγή των βαρών ως SNs	78
5.4	Αποτελέσματα προσομοίωσης	78
6	Επίλογος - Μελλοντικές Προεκτάσεις	82
	Βιβλιογραφία	83

Ευρετήριο Εικόνων

1.1	Συμβατικός ADC	12
1.2	ΣΔ Διαμορφωτής	13
2.1	1ης τάξης ΣΔ Διαμορφωτής	15
2.2	Γραμμικό μοντέλο για τον κβαντιστή	16
2.3	Γραμμικό μοντέλο του 1ης τάξης ΣΔ Διαμορφωτή	16
2.4	2 ^{ης} τάξης ΣΔ Διαμορφωτής	18
2.5	Γραμμικό μοντέλο 2 ^{ης} τάξης ΣΔ Διαμορφωτή	19
2.6	Γενική Μορφή ΣΔ Διαμορφωτή ψηλότερης τάξης	20
2.7	ΣΔ Διαμορφωτής N-οστής τάξης με πόλους στο 1 (MODN)	20
2.8	MASH τοπολογία 2 σταδίων	22
2.9	Τοπολογία MASH N-οστής τάξης	22
2.10	Error-Feedback Διαμορφωτής 1 ^{ης} Τάξης	23
2.11	Error-Feedback Διαμορφωτές υψηλότερης τάξης	23
3.1	Τυπικό γράφημα της συνάρτησης F	25
3.2	Μέση τιμή της ακολουθίας εξόδου σε μήκος μιας περιόδου	32
3.3	Απεικόνιση Cantor	33
3.4	N-οστής τάξης ΣΔ Διαμορφωτής	34
3.5	Φράγματα των καταστάσεων x_1, x_2 του MOD2	40
3.6	Τροχιές MOD2 με διαφορετικές αρχικές συνθήκες $x_1[0], x_2[0]$ και εισόδους u	41
3.7	Τροχιές MOD3 με διαφορετικές εισόδους u	42
3.8	Error-Feedback διαμορφωτής 1 ^{ης} τάξης	43
3.9	Περίοδοι ακολουθιών εξόδου EFM1 με $M = 2^4$ για διάφορες τιμές της εισόδου u	46
3.10	MASH Error-Feedback Διαμορφωτής N-οστής τάξης	46
3.11	Περίοδοι ακολουθιών εξόδου MASH EFM1 2ης τάξης	48
4.1	Βρόχος κλειδωμένης φάσης (PLL)	50
4.2	Ακέραια σύνθεση συχνότητας βασισμένη σε PLL	50
4.3	Κλασματική σύνθεση συχνότητας βασισμένη σε PLL. Ο διαιρέτης ελέγχεται από το κρατούμενο εξόδου ενός ψηφιακού συσσωρευτή.	51
4.4	Κλασματική σύνθεση συχνότητας βασισμένη σε PLL. Ο διαιρέτης ελέγχεται από την ακολουθία εξόδου ενός ΣΔ Διαμορφωτή.	52

4.5	1 ^{ης} τάξης ΣΔ Διαμορφωτής με dithering	54
4.6	MASH διαμορφωτής N σταδίων MOD1 με dithering	56
4.7	Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού ϵ_1 σε έναν 2 ^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή με dithering	57
4.8	Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού ϵ_2 σε έναν 2 ^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή με dithering	57
4.9	Φάσμα εξόδου ενός 2 ^{ας} τάξης MASH διαμορφωτή με και χωρίς dithering.	58
4.10	In-loop dithering	58
4.11	Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού ϵ_1 ενός MASH διαμορφωτή 2 σταδίων με σταθερή είσοδο $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$	63
4.12	Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού ϵ_2 ενός MASH διαμορφωτή 2 σταδίων με σταθερή είσοδο $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$	64
4.13	Φάσμα εξόδου ενός MASH διαμορφωτή 2 σταδίων με άρρητη είσοδο $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$	64
4.14	Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού ϵ_2 ενός MASH διαμορφωτή 3 σταδίων με άρρητη αρχική συνθήκη $x_1[0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$	65
4.15	Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού ϵ_3 ενός MASH διαμορφωτή 3 σταδίων με άρρητη αρχική συνθήκη $x_1[0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$	65
4.16	Φάσμα εξόδου ενός MASH διαμορφωτή 3 σταδίων με άρρητη αρχική συνθήκη $x_1[0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$	66
4.17	Τροποποιημένη τοπολογία EFM1 [1].	67
4.18	Σύγκριση του φάσματος εξόδου ενός 3 ^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή βασισμένου στον τροποποιημένο EFM1, αυτού ενός 3 ^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή με απλούς EFM1 όπου έχει εφαρμοστεί dithering και ενός απλού 3 ^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε είσοδο $u = 256$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.	69
4.19	Σύγκριση του φάσματος εξόδου ενός 3 ^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή με πρώτο modulus $M = 509$, με πρώτο modulus $M = 2^{17} - 1$ και με modulus $M = 512$. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε είσοδο $u = 256$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.	71
4.20	Σύγκριση του φάσματος εξόδου ενός 3 ^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή με πρώτο modulus $M = 2^{17} - 1$ και με modulus $M = 2^{17}$ όπου έχει εφαρμοστεί dithering. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε είσοδο $u = 256$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.	71
4.21	Σύγκριση του φάσματος εξόδου ενός 3 ^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή με πρώτο modulus $M = 2^{17} - 1$ και ενός με modulus $M = 2^{17}$ που βασίζεται στον τροποποιημένο EFM1. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε είσοδο $u = 256$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.	72
5.1	Κλασικό σχήμα DSP	73
5.2	Γεννήτρια Στοχαστικών Αριθμών SNG	74
5.3	Υλοποιήσεις LFSR	75
5.4	Πολλαπλασιασμός μεταξύ 2 SNs	76

5.5	Πολυπλέκτης ως στοχαστικός αθροιστής. $X = 8/16$, $Y = 6/16$ και $Z = 1/2(X+Y) = 7/16$	76
5.6	Προτεινόμενο MOD1-SC σχήμα DSP. Ο MOD1 κωδικοποιεί ένα multi-bit σήμα σε 1-bit, όπου τα 0 και 1 μεταφέρουν την πληροφορία των -1 και 1 αντίστοιχα. Στη συνέχεια, το 1-bit σήμα φιλτράρεται από ένα FIR φίλτρο $(M-1)$ τάξης. . .	77
5.7	Σχήμα SNG με διαμοιραζόμενο LFSR με χρήση κυκλικής ολίσθησης [2]	78
5.8	Σύγκριση του φάσματος (πάνω) και της απόκρισης συχνότητας (κάτω) μεταξύ του προτεινόμενου MOD1-SC σχήματος και της συνηθισμένης δυαδικής υλοποίησης.	79
5.9	Επίδοση του προτεινόμενου MOD1-SC σχήματος αναφορικά με το SNR για επιλεγμένες τιμές του OSR.	80

Κατάλογος Πινάκων

3.1	Αριθμός κύριων ακολουθιών για διάφορα μήκη	37
5.1	Παράμετροι προσομοίωσης	79
5.2	Σύγκριση υλοποίησης σε FPGA μεταξύ της MOD1-SC και της συνηθισμένης δυναμικής υλοποίησης.	81

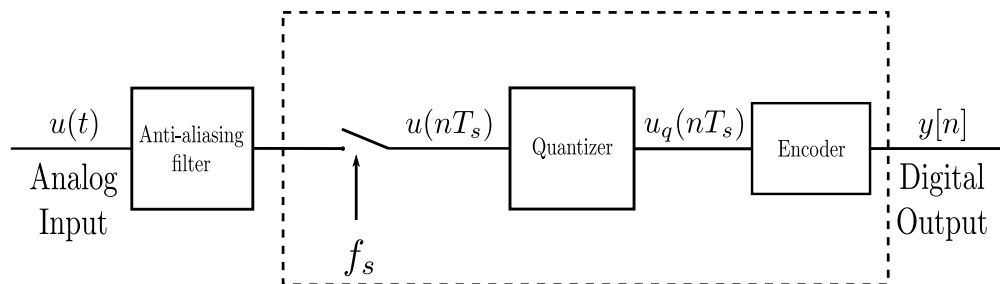
1. Εισαγωγή

Στη σημερινή εποχή, η επεξεργασία σημάτων επιτελείται κυρίως από ψηφιακά μέσα, καθώς τα ψηφιακά κυκλώματα είναι σθεναρά και μπορούν να υλοποιηθούν με εξαιρετικά μικρές και απλές δομές, οι οποίες, εν συνεχεία, μπορούν να συνδυαστούν ώστε να προκύψουν πιο περίπλοκα συστήματα, τα οποία όμως είναι ακριβή και γρήγορα. Κάθε χρόνο, η ταχύτητα και η πυκνότητα των ψηφιακών ολοκληρωμένων κυκλωμάτων (ICs) αυξάνεται, διευρύνοντας την κυριαρχία των ψηφιακών μέσων σε όλες σχεδόν τις τηλεπικοινωνιακές εφαρμογές. Συνεπώς, πυρήνας κάθε συστήματος επεξεργασίας σημάτων είναι η μετατροπή των φυσικών αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά.

Η μετατροπή ενός σήματος από αναλογικό σε ψηφιακό περιλαμβάνει δύο διαδοχικά βήματα:

1. ομοιόμορφη δειγματοληψία του αναλογικού σήματος εισόδου
2. ομοιόμορφος κβαντισμός του δειγματοληπτημένου σήματος

Τα παραπάνω βήματα επιτελούνται από έναν Αναλογικό-σε-Ψηφιακό Μετατροπέα (Analog-to-Digital Converter, ADC). Ένα τυπικό σχήμα ενός ADC παρουσιάζεται στην εικόνα 1.1.



Εικόνα 1.1: Συμβατικός ADC

Αυτοί οι μετατροπείς μπορούν να ταξινομηθούν σε 2 κατηγορίες: τους Nyquist μετατροπείς και τους υπερδειγματοληπτημένους (oversampled) μετατροπείς.

Σύμφωνα με τη συμβατική δειγματοληψία Nyquist, το αναλογικό σήμα δειγματοληπτείται με συχνότητα $f_{Nyquist} = 2f_B$, όπου το f_B είναι η μέγιστη συχνότητα του σήματος εισόδου. Αντί αυτού, μπορούμε να υπερδειγματοληπτήσουμε το σήμα εισόδου, δηλαδή η δειγματοληψία να γίνει με συχνότητα πολύ μεγαλύτερη της συχνότητας Nyquist, δηλαδή $f_s \gg f_{Nyquist}$. Αυτή

η διαδικασία ονομάζεται υπερδειγματοληψία (oversampling) και μία μετρική αυτής είναι ο λόγος υπερδειγματοληψίας (oversampling ratio OSR) που ορίζεται ως :

$$OSR = \frac{f_s}{2f_B} \quad (1.1)$$

Συνήθως, το OSR θεωρείται να είναι δύναμη του 2.

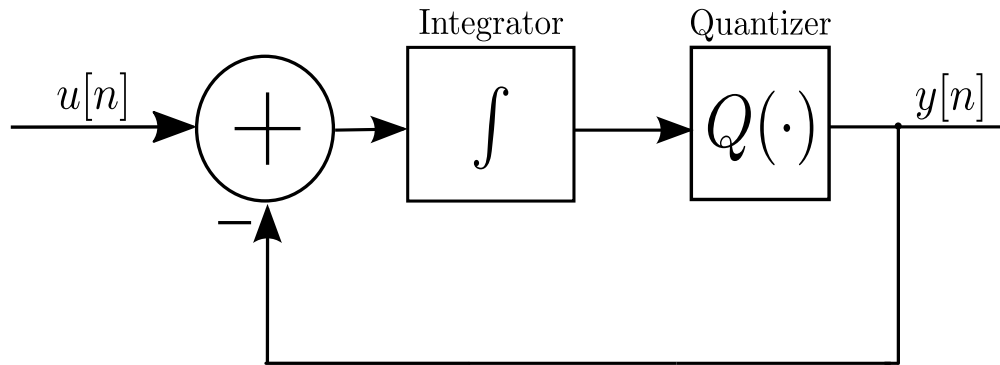
Η υπερδειγματοληψία βελτιώνει την ποιότητα της ψηφιακής εξόδου, όσον αφορά το Signal-to-Quantization-Noise Ratio (SQNR). Πράγματι, όταν εφαρμόζεται η υπερδειγματοληψία, ο θόρυβος κβαντισμού κατανέμεται σε μεγαλύτερο εύρος συχνοτήτων, με αποτέλεσμα ο θόρυβος στο συχνοτικό εύρος ενδιαφέροντος να μειωθεί:

$$P_{noise,in-band} = \frac{1}{f_s} \int_{-f_B}^{f_B} \frac{\Delta^2}{12} df = \frac{\Delta^2}{12} \frac{1}{OSR} \quad (1.2)$$

Επομένως, SQNR υπολογίζεται σε dB ως:

$$SQNR_{oversampling} = 10 \log_{10} \frac{P_{signal}}{P_{noise,in-band}} = 10 \log_{10} \frac{P_{signal}}{\frac{\Delta^2}{12}} OSR = SQNR_{Nyquist} + 10 \log_{10}(OSR) \quad (1.3)$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι το SQNR αυξάνεται κατά $10 \log_{10} 2 \approx 3\text{dB}$ για κάθε διπλασιασμό του OSR. Τυπικοί μετατροπείς που υπερδειγματοληπτούν το αναλογικό σήμα εισόδου είναι οι Σίγμα-Δέλτα (ΣΔ) Διαμορφωτές.



Εικόνα 1.2: ΣΔ Διαμορφωτής

Οι ΣΔ Διαμορφωτές, αν και είναι απλά κυκλώματα, μπορούν να εμφανίσουν εξαιρετικά περίπλοκη συμπεριφορά, ακόμα και για απλές εισόδους, όπως dc εισόδους. Επομένως, η μαθηματική ανάλυση ΣΔ Διαμορφωτών με σταθερή είσοδο είναι, εκτός από ενδιαφέροντα, εξαιρετικά σημαντική, καθώς τέτοιοι διαμορφωτές βρίσκουν πεδίο εφαρμογής σε σημαντικούς τομείς, όπως στη σύνθεση συχνότητας.

Το υπόλοιπο της εργασίας οργανώνεται ως εξής:

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε τις βασικές τοπολογίες ΣΔ Διαμορφωτών, τόσο κλασικών όσο και Error-Feedback, παρουσιάζουμε τη στρατηγική MASH και διεξάγουμε μια προκαταρκτική μελέτη αυτών με μεθόδους γραμμικοποίησης.

Στο Κεφάλαιο 3 αναλύουμε μαθηματικά τους ΣΔ Διαμορφωτές με σταθερές εισόδους, υπό το πρίσμα των τμηματικά συνεχών απεικονίσεων, και εξάγουμε συμπεράσματα για την περιοδικότητα αυτών.

Στο Κεφάλαιο 4, με αφετηρία την εφαρμογή των ΣΔ Διαμορφωτών σε κυκλώματα σύνθεσης συχνότητας, παρουσιάζουμε αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία για τις φασματικές ιδιότητες των ΣΔ Διαμορφωτών και τεχνικές για την μείωση των spurious tones στο φάσμα εξόδου αυτών.

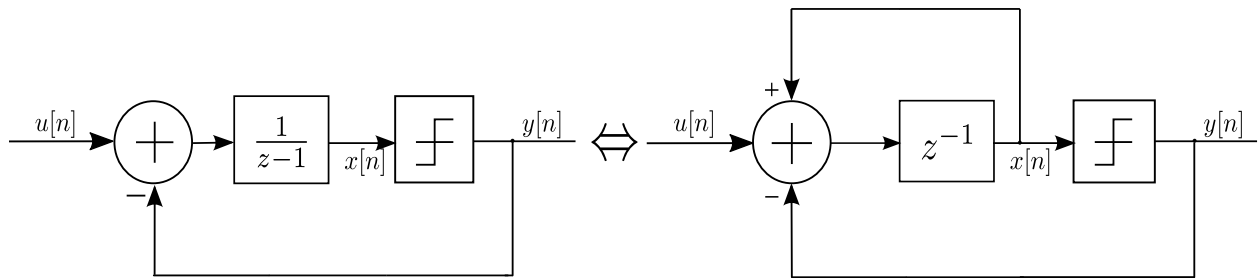
Στο Κεφάλαιο 5 επωφελούμαστε από τη 1-bit κωδικοποίηση που προσφέρουν οι 1-bit ΣΔ Διαμορφωτές και προτείνουμε ένα σχήμα ψηφιακής επεξεργασίας σήματος που χρησιμοποιεί τεχνικές Stochastic Computing.

Τέλος, το Κεφάλαιο 6 συνοψίζει την παρούσα εργασία και περιέχει μελλοντικές προεκτάσεις αυτής.

2. Βασικές πληροφορίες για τους Σίγμα-Δέλτα (ΣΔ) Διαμορφωτές

2.1 ΣΔ Διαμορφωτές 1^{ης} τάξης

Ο απλούστερος ΣΔ Διαμορφωτής είναι ο ΣΔ Διαμορφωτής 1^{ης} τάξης, που παρουσιάζεται στην εικόνα 2.1. Από αυτό το σημείο και έπειτα θα αναφερόμαστε σε αυτόν ως MOD1.



Εικόνα 2.1: 1ης τάξης ΣΔ Διαμορφωτής

Η ίδια διάταξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για A/D και για D/A μετατροπές, αλλά και στις δύο περιπτώσεις η δυναμική του διαμορφωτή παραμένει η ίδια. Λόγω της ύπαρξης του κβαντιστή, το σύστημα είναι εξαιρετικά μη γραμμικό και ασυνεχές, και περιγράφεται από την εξής εξίσωση διαφορών:

$$x[n + 1] = x[n] + u[n] - y[n] \quad (2.1)$$

όπου

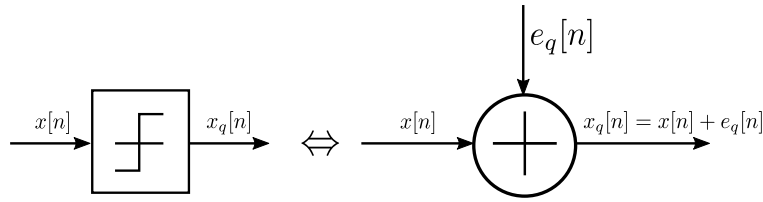
$$y[n] = \text{sgn}(x[n]) = \begin{cases} 1 & , x[n] \geq 0 \\ -1 & , x[n] < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

αν θεωρήσουμε 1-bit κβαντιστή με επίπεδα κβαντισμού στο ± 1 . Ένα από τα αποτελέσματα της πολύπλοκης δυναμικής του MOD1 είναι η εμφάνιση περιοδικών ακολουθιών εξόδου για dc είσοδο. Θα αναφερθούμε εκτενέστερα στους οριακούς κύκλους στο κεφάλαιο 3.

Γραμμικό Μοντέλο

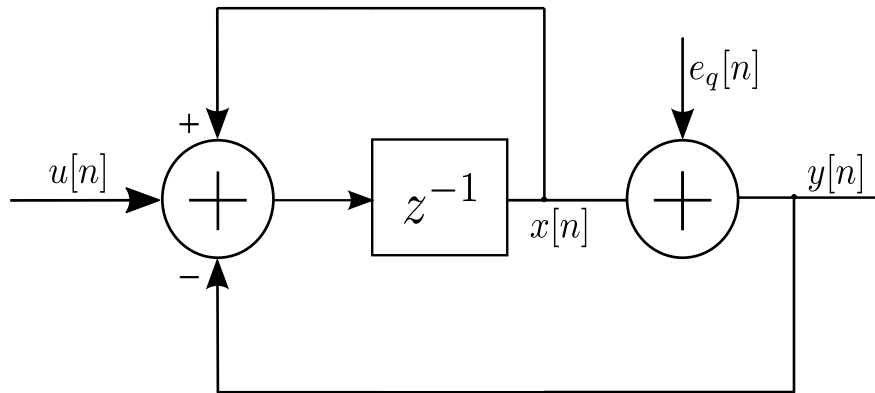
Όπως προαναφέρθηκε, η ύπαρξη του κβαντιστή καθιστά περίπλοκη την ακριβή ανάλυση του κυκλώματος του ΣΔ Διαμορφωτή. Μπορούμε, όμως, να κάνουμε μια ποιοτική μελέτη της

απόδοσης του MOD1 αντικαθιστώντας τον κβαντιστή με το γραμμικό του μοντέλο, όπου υποθέτουμε ότι ο θόρυβος κβαντισμού είναι προσθετικός στο σήμα:



Εικόνα 2.2: Γραμμικό μοντέλο για τον κβαντιστή

Επομένως, το γραμμικό μοντέλο του MOD1 είναι το:



Εικόνα 2.3: Γραμμικό μοντέλο του 1ης τάξης ΣΔ Διαμορφωτή

Από αυτό το μοντέλο έχουμε ότι:

$$zX(z) = X(z) + U(z) - Y(z) \Rightarrow X(z) = (z^{-1} - 1)(U(z) - Y(z)) \quad (2.3)$$

και

$$Y(z) = X(z) + E_q(z) = (z^{-1} - 1)(U(z) - Y(z)) + E_q(z) \Rightarrow Y(z) = z^{-1}U(z) + (1 - z^{-1})E_q(z) \quad (2.4)$$

Επομένως, για τον MOD1, ισχύει ότι:

$$STF(z) = z^{-1}, \quad NTF(z) = 1 - z^{-1}$$

Ιδανικά, θα θέλαμε η $STF(z)$ να είναι ολοπερατή, ώστε να περνάει όλο το σήμα εισόδου στην έξοδο, και η $NTF(z)$, υψιπερατή ώστε ο θόρυβος κβαντισμού να πηγαίνει σε υψηλότερες συχνότητες (*noise-shaping*). Παρατηρούμε ότι η $STF(z)$ είναι ολοπερατή και η $NTF(z)$ υψιπερατή, επομένως ο MOD1 επιτυγχάνει το *noise-shaping*.

Συνεισφορά του noise-shaping στο SQNR

Το noise-shaping βελτιώνει επιπλέον το SQNR. Πράγματι:

$$P_{noise,in-band} = \frac{\sigma_e^2}{f_s} \int_{-f_B}^{f_B} |NTF(e^{j2\pi f/f_s})|^2 df = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi/OSR}^{\pi/OSR} |NTF(e^{j\theta})|^2 d\theta \quad (2.5)$$

όπου $\sigma_e^2 = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$ Ισχύει ότι: $|NTF(e^{j\theta})|^2 = |1 - e^{-j\theta}|^2 = 2\theta - 2\cos\theta$, άρα

$$P_{noise,in-band} = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{\pi}{OSR} - \sin \frac{\pi}{OSR} \right) \quad (2.6)$$

Προσεγγίζοντας το ημίτονο αναπτύσσοντάς το σε σειρά Taylor ως $\sin x \approx x - x^3/3!$ έχουμε ότι:

$$P_{noise,in-band} \approx \frac{\pi^2}{9OSR^3} \quad (2.7)$$

Αν θεωρήσουμε ημιτονική είσοδο πλάτους A, επομένως $P_{signal} = \frac{A^2}{2}$, το SQNR θα υπολογίζεται ως:

$$SQNR = 10 \log_{10} \frac{P_{signal}}{P_{noise,in-band}} = C_1 + 10 \log_{10}(OSR^3) \text{ (dB)} \quad (2.8)$$

όπου $C_1 = 10 \log_{10}(\frac{9A^2/2}{\pi^2})$. Παρατηρούμε ότι με κάθε διπλασιασμό του OSR, το SQNR βελτιώνεται κατά $30 \log_{10} 2 \approx 9dB$ με κάθε διπλασιασμό του OSR.

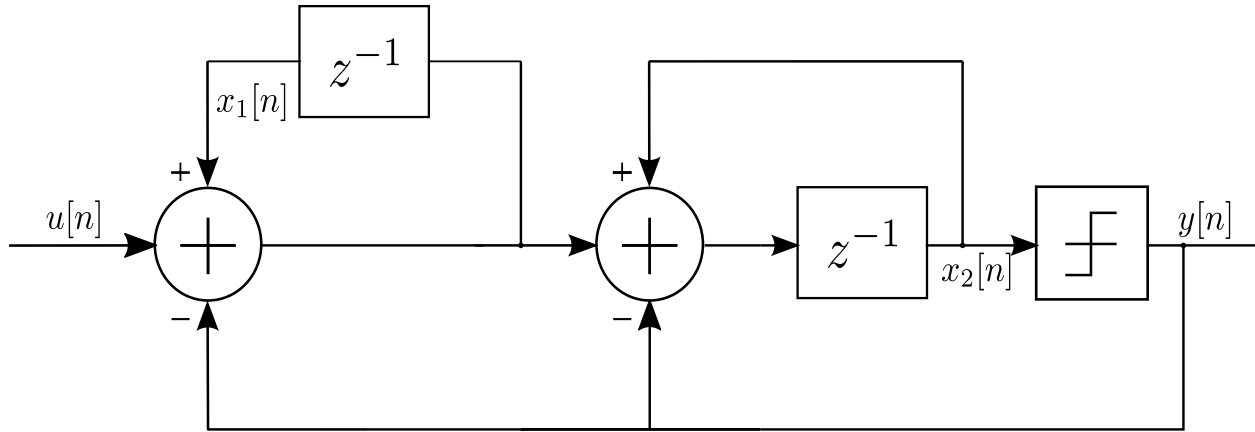
Ευστάθεια

Όσον αφορά την ευστάθεια του MOD1, από την εξίσωση 2.1 είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι:

- Αν $|u[n]| > 1$, τότε το σύστημα γίνεται ασταθές, καθώς η κατάσταση $x[n]$ γίνεται μη φραγμένη, αφού $|u[n] - \text{sgn}(x[n])| > 1 \forall n$
- Αν $|u[n]| < 1$ και $|x[0]| < 2$, τότε η κατάσταση $x[n]$ είναι φραγμένη με $x[n] \leq 2 \forall n \geq 1$
- Αν $|u[n]| < 1$ και $|x[0]| < 2$, τότε η έξοδος $y[n]$ θα είναι συνεχώς +1 (αν $x[0] > 2$) ή -1 (αν $x[0] < -2$) και το $|x[n]|$ θα μειώνεται συνεχώς μέχρι να γίνει μικρότερο του 2.

2.2 ΣΔ Διαμορφωτής $2^{\eta\varsigma}$ τάξης

Ο απλούστερος τρόπος για να κατασκευαστεί ένας ΣΔ Διαμορφωτής $2^{\eta\varsigma}$ τάξης (στη συνέχεια θα αναφερόμαστε σε αυτόν ως MOD2) είναι να αντικαταστήσουμε τον κβαντιστή του MOD1 με έναν MOD1. Στην εικόνα 2.5 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα.



Εικόνα 2.4: 2^{ης} τάξης ΣΔ Διαμορφωτής

Η μη-γραμμική δυναμική του MOD2 περιγράφεται από τις εξής εξισώσεις διαφορών:

$$x_1[n+1] = x_1[n] + u[n] - y[n] \quad (2.9)$$

$$x_2[n+1] = x_2[n] + x_1[n+1] - y[n] \quad (2.10)$$

όπου:

$$y[n] = \text{sgn}(x_2[n]) \quad (2.11)$$

Επομένως, οι εξισώσεις κατάστασης του MOD2 είναι:

$$\mathbf{x}[n+1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}[n] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u[n] - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{sgn}(x_2[n]) \quad (2.12)$$

με $\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] & x_2[n] \end{bmatrix}^T$

Γραμμικό Μοντέλο

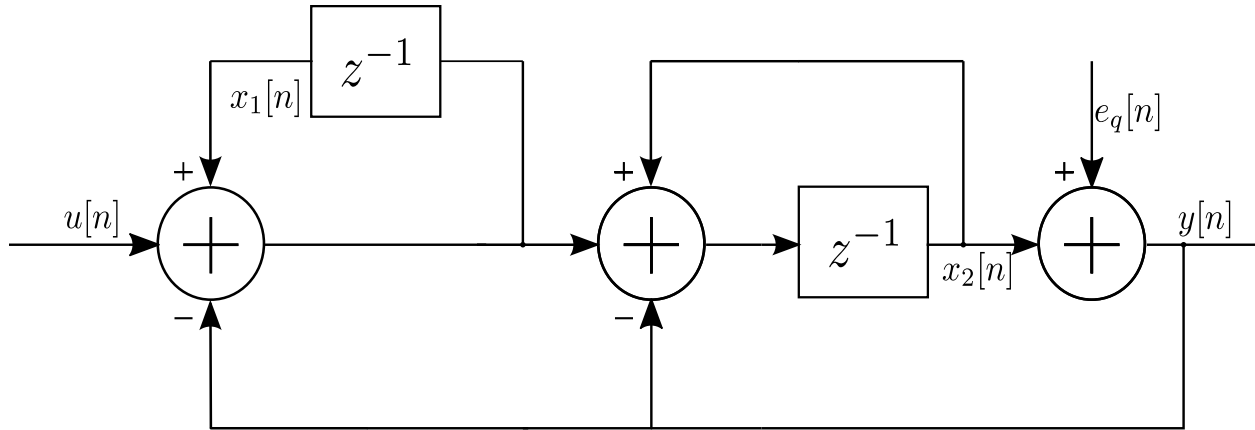
Αντικαθιστώντας τον κβαντιστή με το γραμμικό του μοντέλο έχουμε ότι:

$$zX_1(z) = X_1(z) + U(z) - Y(z) \Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{z-1}(U(z) - Y(z)) \quad (2.13)$$

$$zX_2(z) = X_2(z) + zX_1(z) \Rightarrow X_2(z) = \frac{z}{z-1}X_1(z) - \frac{1}{z-1}Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2}U(z) - \frac{2z-1}{(z-1)^2}Y(z) \quad (2.14)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} Y(z) = X_2(z) + E_q(z) &\Rightarrow Y(z) - E_q(z) = \frac{z}{(z-1)^2}U(z) - \frac{2z-1}{(z-1)^2}Y(z) \\ &\Rightarrow Y(z) = z^{-1}U(z) + (1-z^{-1})^2E_q(z) \end{aligned} \quad (2.15)$$



Εικόνα 2.5: Γραμμικό μοντέλο 2^{ης} τάξης ΣΔ Διαμορφωτή

Συνεπώς $STF(z) = z^{-1}$, $NTF(z) = (1-z^{-1})^2$. Λόγω της μορφής της NTF περιμένουμε ότι θα γίνει καλύτερο noise-shaping από τον MOD1, δηλαδή ο θόρυβος κβαντισμού θα μετακινηθεί σε ακόμη μεγαλύτερες συχνότητες, βελτιώνοντας παραπάνω το SQNR. Πράγματι, ακολουθώντας παρόμοια βήματα με αυτά για τον υπολογισμό του SQNR στον MOD1, υπολογίζουμε ότι

$$P_{noise,in-band} \approx \frac{\pi^4}{15OSR^5} \quad (2.16)$$

και

$$SQNR = C_2 + 10\log_{10}(OSR^5) \text{ (dB)} \quad (2.17)$$

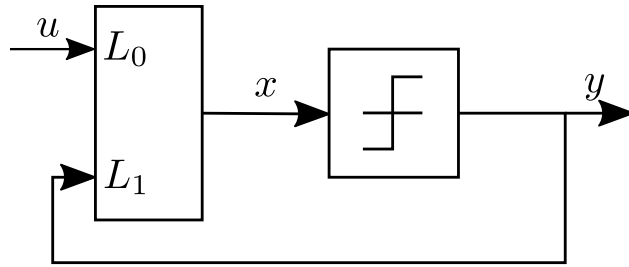
όπου $C_2 = 10\log_{10}(\frac{15A^2}{2\pi^4})$, έχοντας θεωρήσει ότι $P_{signal} = \frac{A^2}{2}$. Παρατηρούμε ότι, στον MOD2, για κάθε διπλασιασμό του OSR το SQNR βελτιώνεται κατά $50\log_{10}2 \approx 15dB$.

Ευστάθεια

Η ανάλυση για την ευστάθεια του MOD2 είναι εξαιρετικά πιο περίπλοκη από την αντίστοιχη για τον MOD1. Περισσότερα για τις τροχιές και την ευστάθεια του MOD2 θα αναφερθούν στο κεφάλαιο 3.

2.3 ΣΔ Διαμορφωτές Υψηλότερης Τάξης

Η γενική μοντελοποίηση ενός ΣΔ Διαμορφωτή Υψηλότερης τάξης παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.7.



Εικόνα 2.6: Γενική Μορφή ΣΔ Διαμορφωτή ψηλότερης τάξης

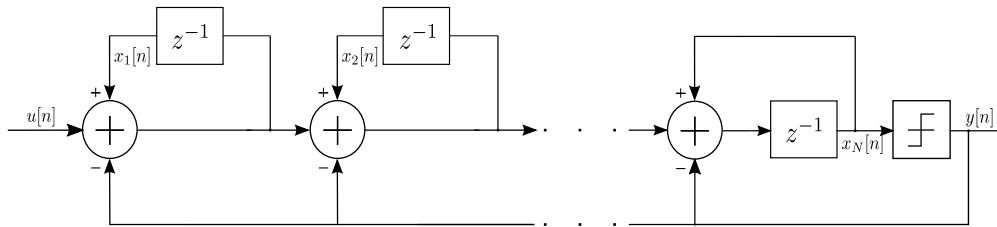
Αντικαθιστώντας πάλι το γραμμικό μοντέλο του κβαντιστή θα έχουμε ότι:

$$Y(z) = \frac{L_0(z)}{1 - L_1(z)}U(z) + \frac{1}{1 - L_1(z)}E_q(z) \quad (2.18)$$

Άρα

$$STF(z) = \frac{L_0(z)}{1 - L_1(z)}, \quad NTF(z) = \frac{1}{1 - L_1(z)}$$

Ακολουθώντας την ίδια τακτική που ακολουθήσαμε για την κατασκευή του απλούστερου ΣΔ Διαμορφωτή 2^{ns} τάξης, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον απλούστερο ΣΔ Διαμορφωτή N-οστής τάξης, που παρουσιάζεται στην εικόνα.



Εικόνα 2.7: ΣΔ Διαμορφωτής N-οστής τάξης με πόλους στο 1 (MODN)

Γι' αυτόν τον διαμορφωτή θα ισχύει ότι $STF(z) = z^{-1}$, $NTF(z) = (1 - z^{-1})^N$. Όσον αφορά το SQNR, οι τύποι 2.7 και 2.16 γενικεύονται ως:

$$P_{noise,in-band} \approx \frac{\pi^{2N}}{3(2N + 1)OSR^{2N+1}} \quad (2.19)$$

Συνεπώς, αν υποθέσουμε $P_{signal} = \frac{A^2}{2}$ τότε θα ισχύει ότι:

$$SQNR = C_N + 10\log_{10}(OSR^{2N+1}) \quad (2.20)$$

όπου $C_N = 10\log_{10}\left(\frac{3(2N+1)A^2}{2\pi^2}\right)$. Με κάθε διπλασιασμό του OSR, το SQNR αυξάνεται κατά $10(2N + 1)\log_{10}2 \approx 3(2N + 1)dB$

Ευστάθεια

Από την εξίσωση 2.18 παρατηρούμε ότι, για το γραμμικοποιημένο μοντέλο, η ευστάθεια εξαρτάται μόνο από την $L_1(z)$, η οποία με τη σειρά της καθορίζεται από την $NTF(z)$. Όμως, αυτό το μοντέλο δεν λαμβάνει υπόψη τις μη γραμμικότητες του διαμορφωτή, επομένως η πρόβλεψη ευστάθειας μπορεί να είναι εσφαλμένη.

Ένας εμπειρικός κανόνας για την ευστάθεια 1-bit ΣΔ Διαμορφωτών υψηλότερης τάξης είναι το κριτήριο Lee [3]:

Ένας 1-bit ΣΔ Διαμορφωτής πιθανόν να είναι ευσταθής αν

$$\max_{\omega} |NTF(e^{j\omega})| < 1.5$$

Στην πρόβλεψη της ευστάθειας σημαντικό ρόλο παίζει ο τρόπος με τον οποίο θα μοντελοποιήσουμε τον κβαντιστή. Ένας τέτοιος τρόπος είναι η quasi-linear μοντελοποίηση [4–6].

2.4 Πολυσταδιακοί ΣΔ Διαμορφωτές

Μια στρατηγική για να αυξήσουμε την απόδοση ενός ΣΔ Διαμορφωτή ως προς το SQNR, ειδικά για χαμηλές τιμές του OSR, είναι να συνδέσουμε πολλούς ΣΔ Διαμορφωτές εν σειρά, ώστε να εξαλείψουμε τον θόρυβο κβαντισμού. Αυτή η στρατηγική ονομάζεται αλλιώς MASH (multi-stage noise-shaping).

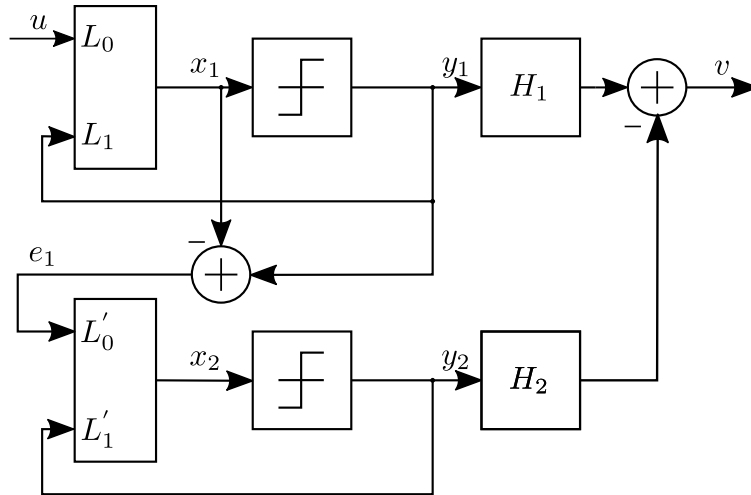
Στην εικόνα 2.8 παρουσιάζεται μια MASH τοπολογία 2 σταδίων, όπου κάθε στάδιο αποτελείται από έναν ΣΔ Διαμορφωτή. Το σφάλμα κβαντισμού ενός σταδίου τροφοδοτείται στο επόμενο στάδιο. Ισχύει ότι:

$$V_1(z) = STF_1(z)U(z) + NTF_1(z)E_1(z) \quad (2.21)$$

$$V_2(z) = STF_2(z)E_1(z) + NTF_2(z)E_2(z) \quad (2.22)$$

$$V(z) = H_1(z)V_1(z) - H_2(z)V_2(z) = H_1(z)STF_1(z)U(z) + H_1(z)NTF_1(z)E_1(z) - H_2(z)STF_2(z)E_1(z) - H_2(z)NTF_2(z)E_2(z) \quad (2.23)$$

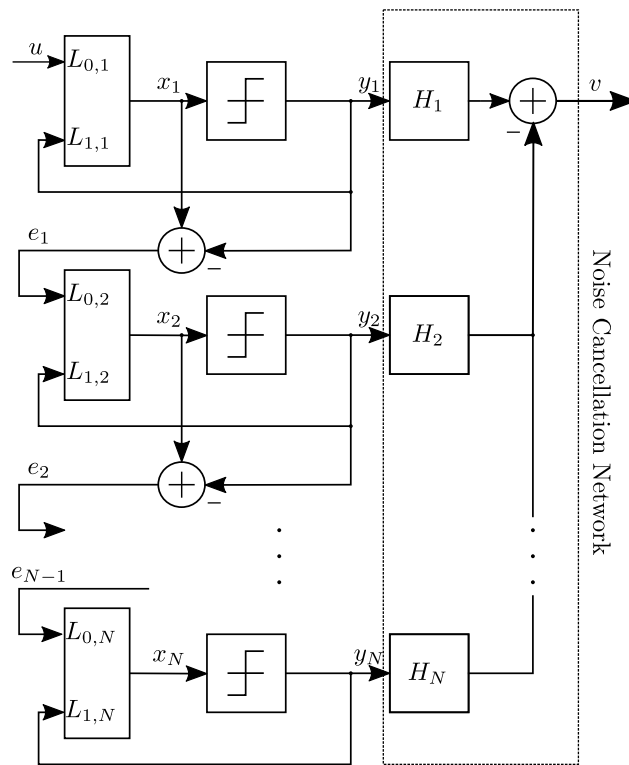
Οι συναρτήσεις μεταφοράς H_1 , H_2 επιλέγονται έτσι ώστε η επίδραση του θορύβου E_1 του πρώτου σταδίου να μηδενίζεται, δηλαδή $H_1(z)NTF_1(z) - H_2(z)NTF_2(z) = 0$. Η πιο απλή επιλογή ώστε να επιτυγχάνεται αυτό είναι: $H_1(z) = STF_2(z)$, $H_2(z) = NTF_1(z)$.



Εικόνα 2.8: MASH τοπολογία 2 σταδίων

Το βασικό πλεονέκτημα αυτής της τοπολογίας είναι ότι, αφού έχει εξαλειφθεί του σφάλμα κβαντισμού e_1 , το εναπομείναν σφάλμα κβαντισμού στην έξοδο είναι αυτό του δεύτερου σταδίου e_2 , το οποίο έχει ως είσοδο το e_1 . Επομένως, το e_2 είναι προσεγγιστικά λευκός θόρυβος.

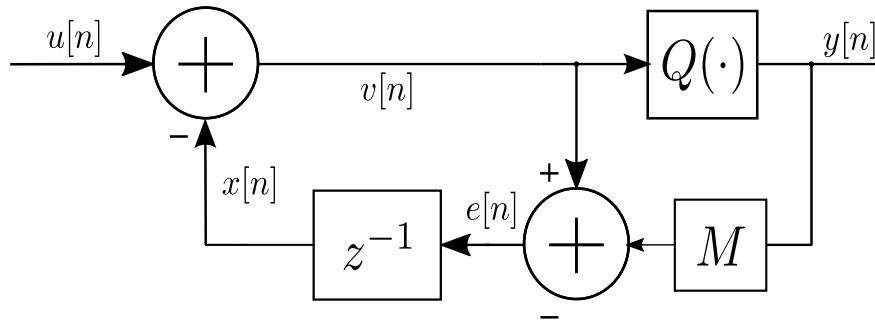
Η παραπάνω τοπολογία MASH μπορεί εύκολα να γενικευθεί έτσι ώστε να έχει περισσότερα στάδια, και η ανάλυση για την επιλογή των φίλτρων εξάλειψης του θορύβου είναι παρόμοια.



Εικόνα 2.9: Τοπολογία MASH N-οστής τάξης

2.5 Τοπολογία Ανάδρασης Σφάλματος (Error-Feedback)

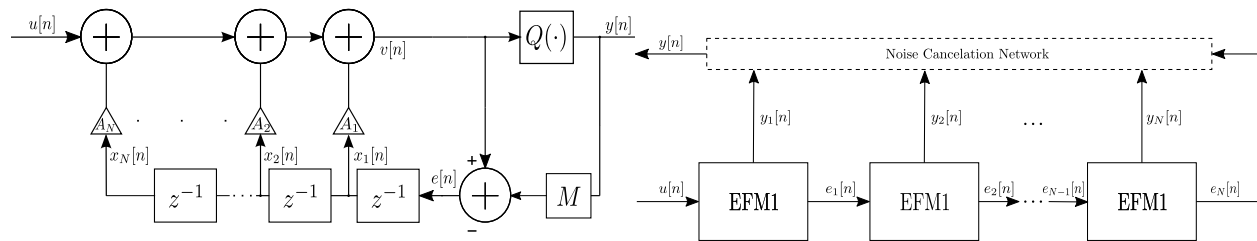
Μια εναλλακτική τοπολογία $\Sigma\Delta$ Διαμορφωτή είναι η τοπολογία ανάδρασης σφάλματος (error-feedback). Το σφάλμα κβαντισμού $e[n]$ επιστρέφει μέσω αρνητικής ανάδρασης στην είσοδο. Στην εικόνα 2.10 παρουσιάζεται ένας error feedback Διαμορφωτής 1^{ης} Τάξης (EFM1):



Εικόνα 2.10: Error-Feedback Διαμορφωτής 1^{ης} Τάξης

Αυτή η τοπολογία δεν χρησιμοποιείται ως ADC, αφού σε τέτοιες εφαρμογές αυτή η τοπολογία θα ήταν πολύ ευαίσθητη σε ατέλειες του φίλτρου, όμως είναι ιδανική για DAC εφαρμογές. Η δυναμική του EFM1 είναι παρόμοια με αυτή του MOD1, και απόρροια αυτής είναι η εμφάνιση περιοδικών ακολουθιών εξόδου για σταθερή (dc) είσοδο, όπως και στον MOD1. Περισσότερα στο κεφάλαιο 3.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε EFM διαμορφωτές υψηλότερης τάξης με 2 τρόπους: είτε αυξάνοντας την τάξη του φίλτρου ανάδρασης και χρησιμοποιώντας multi-bit κβαντιστή, είτε μέσω μιας MASH τοπολογίας με κάθε στάδιο να αποτελείται από έναν EFM1. Σε αντίθεση με τους κλασικούς $\Sigma\Delta$ Διαμορφωτές, υπάρχουν περισσότερα αναλυτικά αποτελέσματα για την ύπαρξη περιοδικών ακολουθιών σε error-feedback διαμορφωτές υψηλότερης τάξης.



(a) EFM N-οστής τάξης. Οι συντελεστές A_i είναι οι διωνυμικοί συντελεστές

(b) MASH τοπολογία από EFM1

Εικόνα 2.11: Error-Feedback Διαμορφωτές υψηλότερης τάξης

3. Μαθηματική Ανάλυση ΣΔ Διαμορφωτών

3.1 Εισαγωγή

Όπως έχει προαναφερθεί, η δυναμική των ΣΔ Διαμορφωτών είναι εξαιρετικά περίπλοκη, λόγω της ύπαρξης του κβαντιστή που εισάγει μια εξαιρετική μη γραμμικότητα καθώς και ένα σημείο ασυνέχειας στο σύστημα. Αποτέλεσμα αυτών είναι η εμφάνιση περιοδικών ακολουθιών εξόδου για dc εισόδους καθώς και η δυνατότητα εμφάνισης χασοτικής συμπεριφοράς.

Παρακάτω, θα αναλύσουμε εκτενώς τη δυναμική του MOD1, υπό την σκοπιά των τμηματικά συνεχών απεικονίσεων, θα παρουσιάσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα για την ευστάθεια του MOD2 και τι συνεπάγεται αυτή για την ύπαρξη περιοδικών ακολουθιών εξόδου και θα δώσουμε ικανές συνθήκες για την μη ύπαρξη περιοδικών ακολουθιών εξόδου σε ΣΔ Διαμορφωτές υψηλότερης τάξης. Έπειτα, θα διεξάγουμε παρόμοια ανάλυση και για τους Error-Feedback διαμορφωτές. Πρέπει να αναφέρουμε ότι θα θεωρούμε παντού 1-bit κβαντιστές και dc είσοδο u , εκτός και αν αναφέρεται ρητά διαφορετικά.

3.2 Ανάλυση MOD1

3.2.1 Μαθηματικό Υπόβαθρο

Αρχικά, θα παρουσιάσουμε ορισμένα θεωρητικά στοιχεία για απεικονίσεις της μορφής

$$x[n+1] = F(x[n]) \quad (3.1)$$

όπου η F παρουσιάζει ένα σημείο ασυνέχειας, όπως παρουσιάζονται στο [7].

Ορισμός 1. Θα λέμε ότι η απεικόνιση 3.1 έχει περιοδικές τροχιές περιόδου $L \in \mathbb{N}$ αν $F^L(x) = x$, όπου $F^L = F \circ F \circ \dots \circ F$ L φορές. Θα λέμε ότι η L είναι κύρια περίοδος της F αν $F^L(x) = x$ και $F^l(x) \neq x$, $\forall l < L$, $l \in \mathbb{N}$

Έστω ότι η F παρουσιάζει ασυνέχεια στο $x = \theta$. Θεωρούμε τα πλευρικά όρια:

$$b = \lim_{x \rightarrow \theta^-} F(x) \quad (3.2)$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \theta^+} F(x) \quad (3.3)$$

Υποθέτουμε ότι $a < \theta < b$, καθώς μόνο σε αυτή την περίπτωση η ασυνέχεια που εμφανίζει το σύστημα επηρεάζει σημαντικά τη δυναμική του συστήματος. Επομένως, μας ενδιαφέρει μόνο το διάστημα $[a, b]$ και μπορούμε να θεωρήσουμε την F ως απεικόνιση $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Για να ισχύει αυτό θεωρούμε ότι $F(a) \geq a$, $F(b) \leq b$.

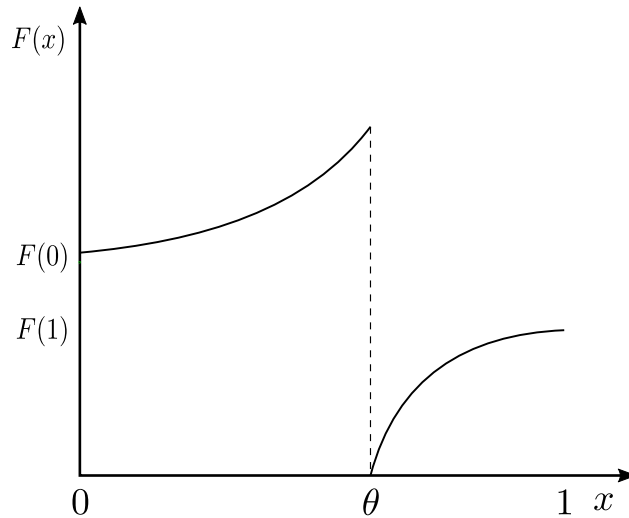
Με την αλλαγή μεταβλητών

$$y = \frac{x - a}{b - a}$$

που απεικονίζει το διάστημα $[a, b]$ στο $[0, 1]$, η F μετασχηματίζεται στην \hat{F} με τύπο

$$\hat{F}(y) = \frac{F((b - a)y + a) - a}{b - a} \quad (3.4)$$

η οποία απεικονίζει το $[0, 1]$ στο $[0, 1]$ και εμφανίζει ασυνέχεια στο $\hat{\theta} = \frac{\theta - a}{b - a}$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η F είναι απεικόνιση από το $[0, 1]$ στο $[0, 1]$, με σημείο ασυνέχειας στο $\theta \in (0, 1)$. Μια τυπική μορφή της F παρουσιάζεται στην εικόνα 3.1.



Εικόνα 3.1: Τυπικό γράφημα της συνάρτησης F

Είναι βολικό να δούμε την απεικόνιση F ως απεικόνιση του μοναδιαίου κύκλου $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ επί αυτόν. Αυτό μπορεί να φανεί διαισθητικά ως εξής: "τεντώνουμε" το μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$ (θεωρούμε ότι το 1 απεικονίζεται στο 0) κατά 2π , το τυλίγουμε και το τοποθετούμε πάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου. Υπό αυτήν τη σκοπιά, το σημείο θ δεν είναι σημείο ασυνέχειας. Η πραγματική ασυνέχεια αυτής τη απεικόνισης έγκειται στο αν $F(0) = F(1)$.

Το βασικό πλεονέκτημα του να δούμε την απεικόνιση F ως απεικόνιση του μοναδιαίου κύκλου είναι επειδή τότε μπορούμε να ορίσουμε τον αριθμό περιστροφής (rotation number):

Ορισμός 2 (Rotation Number [8]). Για κάθε σημείο $x \in [0, 1]$ ορίζουμε τον αριθμό στροφής

(rotation number) $\rho(x)$ ως:

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{(\theta,1]}(F^k(x)) \quad (3.5)$$

όπου $\mathbb{1}_{(\theta,1]}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $(\theta, 1]$.

Ουσιαστικά, ο αριθμός στροφής μετράει τις φορές που μια επανάληψη του αριθμού x βρίσκεται δεξιά του θ , σηματοδοτώντας μια πλήρη στροφή του κύκλου. Για παράδειγμα, αν $\rho(x) = \frac{p}{q}$, όπου $p, q \in \mathbb{Z}$ τότε οι εικόνες του σημείου x μέσω της F έχουν κάνει ακριβώς p στροφές πάνω στον κύκλο μέσα σε q επαναλήψεις.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε τον ορισμό για το σύνολο Cantor, ο οποίος θα μας φανεί χρήσιμος στη συνέχεια :

Ορισμός 3 (Σύνολο Cantor [9]). Θεωρούμε το διάστημα $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$. Από αυτό αφαιρούμε το μεσαίο διάστημα $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ και έτσι προκύπτει το $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επί άπειρον, με το n -οστο διάστημα να είναι το $\mathcal{C}_n = \frac{\mathcal{C}_{n-1}}{3} \cup (\frac{2}{3} + \frac{\mathcal{C}_{n-1}}{3})$, $n \geq 1$. Το σύνολο Cantor αποτελείται από τα σημεία που δεν διαγράφτηκαν από αυτή τη διαδικασία:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο Cantor είναι υπεραριθμήσιμο αλλά $\mu(\mathcal{C}) = 0$, όπου μ το μέτρο Lebesgue. Απόρροια του γεγονότος ότι το σύνολο Cantor έχει μηδενικό μέτρο είναι το ότι δεν μπορεί να περιέχει διαστήματα.

Επιστρέφοντας στην απεικόνιση F , διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

1. $F(0) = F(1)$: Η απεικόνιση F είναι συνεχής. Ο αριθμός στροφής υπάρχει και είναι σταθερός. Αν η F είναι συνάρτηση μιας παραμέτρου $\lambda \in \Lambda$, δηλαδή $F = F(x; \lambda)$, τότε ο αριθμός στροφής είναι γραμμική συνάρτηση της παραμέτρου λ και δεν εξαρτάται από την αρχική συνθήκη της απεικόνισης. Ο αριθμός στροφής λαμβάνει ρητές τιμές πάνω στο \mathbb{Q} . Αν ο αριθμός στροφής είναι ρητός, τότε η απεικόνιση έχει περιοδικές τροχιές ενώ αν είναι άρρητος τότε δεν εμφανίζει περιοδικές τροχιές. [10]
2. $F(0) > F(1)$: Η F απεικονίζει το $[0, 1]$ εντός του $[0, 1]$, αλλά δεν είναι επί. Και πάλι ο αριθμός στροφής υπάρχει και είναι σταθερός. Αν η F είναι συνάρτηση μιας παραμέτρου $\lambda \in \Lambda$, δηλαδή $F = F(x; \lambda)$, τότε ο αριθμός στροφής είναι συνεχής συνάρτηση (συνάρτηση Cantor) της παραμέτρου λ και δεν εξαρτάται από την αρχική συνθήκη της απεικόνισης. Επιπλέον, ο αριθμός στροφής λαμβάνει ρητές τιμές πάνω σε μη κενά διαστήματα και άρρητες τιμές πάνω σε ένα σύνολο Cantor. Αν ο αριθμός στροφής είναι ρητός, τότε η F έχει περιοδικές τροχιές.
3. $F(0) < F(1)$: Η απεικόνιση F είναι επί αλλά όχι 1-1. Η απεικόνιση F παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά με την έννοια ότι ο αριθμός στροφής $\rho(x)$, $x \in [0, 1]$ καλύπτει ένα μη κενό διάστημα

Ο ορισμός του χάους που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω σημαίνει ουσιαστικά ότι η δυναμική του συστήματος είναι σημαντικά ευαίσθητη στις αρχικές συνθήκες.

3.2.2 Ανάλυση της δυναμικής του ιδανικού MOD1

Όπως έχει προαναφερθεί, η δυναμική του ιδανικού MOD1 περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών 2.1. Για την ανάλυση που θα ακολουθήσει, θα υποθέσουμε ότι η είσοδος είναι σταθερή, δηλαδή $u[n] = u \forall n \geq 0$. Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$F(x) = x + u - \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x + u - 1 & , x \geq 0 \\ x + u + 1 & , x < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Στο Κεφάλαιο 1 είχαμε δείξει ότι, για $|u| < 1$, το σύστημα είναι, ή καταλήγει να είναι φραγμένο στο διάστημα $[-2, 2]$. Τώρα θα δείξουμε κάτι πιο ισχυρό:

Πρόταση 1. Έστω η εξίσωση διαφορών $x[n+1] = x[n] + u - \operatorname{sgn}(x[n])$, με $|u| < 1$. Αν $x[k] \in [u-1, u+1]$ για κάποιο k , τότε $x[n] \in [u-1, u+1]$, $\forall n \geq k$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι $u-1 \leq x[k] \leq u+1$. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

1. $x[k] \geq 0$. Τότε $0 \leq x[k] \leq u+1$. Επιπλέον $x[k+1] = x[k] + u - 1 \Rightarrow u-1 \leq x[k+1] \leq 2u \leq u+1$. Άρα $x[k+1] \in [u-1, u+1]$. Επαγωγικά δείχνουμε ότι $x[n] \in [u-1, u+1]$, $\forall n \geq k$.
2. $x[k] < 0$. Τότε $u-1 \leq x[k] < 0$. Επιπλέον $x[k+1] = x[k] + u + 1 \Rightarrow u-1 \leq 2u \leq x[k+1] < u+1$. Άρα $x[k+1] \in [u-1, u+1]$. Επαγωγικά δείχνουμε ότι $x[n] \in [u-1, u+1]$, $\forall n \geq k$.

□

Επομένως, αν $x[0] \in [u-1, u+1]$ τότε $x[n] \in [u-1, u+1]$, $\forall n \geq 0$. Ακόμα κι αν $x[0] \notin [u-1, u+1]$, η κατάσταση $x[n]$ θα τείνει μονότονα να εισέλθει στο διάστημα $[u-1, u+1]$. Για παράδειγμα, αν $x[0] > u+1 > 0 \Rightarrow x[1] = x[0] + u - 1 < x[0]$, η κατάσταση θα φθίνει μέχρι να γίνει μικρότερη του $u+1$. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε την απεικόνιση F ως $F : [u-1, u+1] \rightarrow [u-1, u+1]$, το οποίο συνάδει με το γεγονός ότι η F εμφανίζει ένα σημείο ασυνέχειας στο $\theta = 0$ και τα πλευρικά όρια στο 0 είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = u+1 \quad (3.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = u-1 \quad (3.8)$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό $y = \frac{x-u+1}{2}$, ο οποίος απεικονίζει το διάστημα $[u-1, u+1]$ στο $[0, 1]$, η F μετασχηματίζεται στην \hat{F} , $\hat{F} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με τύπο

$$\hat{F}(y) = y + \frac{u - \operatorname{sgn}(2y + u - 1)}{2} = \begin{cases} y + \frac{u-1}{2} & , y \geq \frac{1-u}{2} \\ y + \frac{u+1}{2} & , y < \frac{1-u}{2} \end{cases} \quad (3.9)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\hat{F}(0) = \hat{F}(1)$. Οπότε ο αριθμός στροφής της F θα είναι συνεχής συνάρτηση του u και αν αυτός είναι ρητός, ισοδύναμα αν το u είναι ρητός, τότε η F θα έχει περιοδικές τροχιές. Μένει να βρούμε τον αριθμό στροφής.

Η ακόλουθη πρόταση οφείλεται στον Gray [11]:

Πρόταση 2. $\hat{F}(y) = \langle y + \beta \rangle := (y + \beta) \bmod 1$, όπου $\beta = \frac{1+u}{2}$

Απόδειξη. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

1. $y \geq \frac{1-u}{2}$. Τότε:

$$y + \beta = y + \frac{1+u}{2} \geq \frac{1-u}{2} + \frac{1+u}{2} = 1$$

και

$$y + \beta < y + 1 < 2$$

$$\text{Άρα } 1 \leq y + \beta < 2 \Rightarrow \langle y + \beta \rangle = y + \beta - 1 = y + \frac{u-1}{2} = \hat{F}(y)$$

2. $y < \frac{1-u}{2}$. Τότε:

$$y + \beta \geq y \geq 0$$

και

$$y + \beta = y + \frac{1+u}{2} \leq \frac{1-u}{2} + \frac{1+u}{2} = 1$$

$$\text{Άρα } 0 \leq y + \beta \leq 1 \Rightarrow \langle y + \beta \rangle = y + \beta = y + \frac{1+u}{2} = \hat{F}(y)$$

Τελικά $\hat{F}(y) = \langle y + \beta \rangle$ □

Η \hat{F} είναι ουσιαστικά η στροφή του μοναδιαίου κύκλου κατά β και εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι ο αριθμός στροφής για αυτή είναι β [12]. Συνεπώς αν $\beta \in \mathbb{Q}$, και συγκεκριμένα $\beta = \frac{p}{q}$, $\gcd(p, q) = 1$, τότε η \hat{F} είναι περιοδική με περίοδο q . Επειδή οι F , \hat{F} είναι ισοδύναμες (ισόμορφες), αν η \hat{F} είναι περιοδική τότε και η F θα είναι περιοδική με την ίδια περίοδο. Ισοδύναμα, η F θα είναι περιοδική αν $u \in \mathbb{Q}$, αφού το β είναι συνεχής συνάρτηση του u .

Υποθέτουμε ότι $u = \frac{b}{a}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ με $\gcd(a, b) = 1$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $b = 2k$, $a = 2l + 1$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Τότε: $\beta = \frac{1+\frac{b}{a}}{2} = \frac{b+a}{2a} = \frac{2(k+l)+1}{2a}$ Άρα, όταν ένα εκ των a, b είναι άρτιος, τότε η περίοδος της F θα είναι $2a$

2. $b = 2k + 1$, $a = 2l + 1$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Τότε: $\beta = \frac{1+\frac{b}{a}}{2} = \frac{b+a}{2a} = \frac{2(k+l+1)}{2a} = \frac{k+l+1}{a}$. Άρα, όταν τα a, b είναι περιττοί, τότε η περίοδος της F θα είναι a

Το να είναι το u ρητός είναι, εκτός από ικανή, και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη περιοδικών τροχιών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει περιοδική τροχιά με περίοδο L . Αυτό σημαίνει ότι $F^L(x[n]) = x[n] \Leftrightarrow x[n+L] = x[n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} x[n+1] &= x[n] + u - \text{sgn}(x[n]) \\ x[n+2] &= x[n+1] + u - \text{sgn}(x[n+1]) \\ &\vdots \\ x[n+L-1] &= x[n+L-2] + u - \text{sgn}(x[n+L-2]) \\ x[n+L] &= x[n+L-1] + u - \text{sgn}(x[n+L-1]) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη έχουμε ότι:

$$x[n+L] - x[n] = Lu - L \sum_{i=n}^{n+L-1} \text{sgn}(x[i])$$

Άρα

$$u = \frac{\sum_{i=n}^{n+L-1} \text{sgn}(x[i])}{L}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$

Από την παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι η μέση τιμή της ακολουθίας εξόδου πάνω σε μία περίοδο μας δίνει την dc είσοδο.

3.2.3 Δομή των περιοδικών ακολουθιών εξόδου

Η εξίσωση 3.10 μπορεί να γενικευτεί ως εξής: το σφάλμα μεταξύ της εισόδου και ενός τμήματος της εξόδου μήκους N :

$$\text{error} = \left| u - \frac{1}{N} \sum_{i=n}^{N+n} \text{sgn}(x[i]) \right| \quad (3.11)$$

είναι ελάχιστο. Για $N = L$ αυτό το σφάλμα μηδενίζεται. Επομένως, καταλαβαίνουμε ότι, για ρητή dc είσοδο $u = \frac{b}{a}$, $\text{gcd}(a, b) = 1$, οι b άσσοι ($\text{sgn}(x[i]) = +1$) πρέπει να κατανέμονται όσο το δυνατόν πιο ομοιόμορφα ανάμεσα στα $b - a$ μηδενικά ($\text{sgn}(x[i]) = -1$) σε μήκος μιας περιόδου a . Με βάση αυτήν την παρατήρηση, μπορούμε να βρούμε τη δομή των περιοδικών ακολουθιών εξόδου:

Ο παρακάτω αλγόριθμος οφείλεται στον Friedman [13] και αναφέρεται ως "Ευκλείδιος Αλγόριθμος επειδή κάνει χρήση της ευκλείδιας διαίρεσης:

1. Απεικονίζουμε τη u στη \hat{u} μέσω του μετασχηματισμού $\hat{u} = \frac{1+u}{2}$.

2. Αναπτύσσουμε το \hat{u} σε συνεχές κλάσμα $\hat{u} = [a_1, \dots, a_n] := \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$. Επειδή

το u είναι ρητός, η ανάλυση σε συνεχές κλάσμα θα σταματήσει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

3. Η ακολουθία εξόδου σε μήκος μιας περιόδου θα δίνεται από την αναδρομική σχέση

$$S_n = S_{n-2}(S_{n-1})^{a_n} \quad (3.12)$$

με αρχικές συνθήκες $S_0 = 0$ και $S_1 = 1S_0^{a_1-1}$, όπου S^k σημαίνει η επανάληψη της ακολουθίας S k φορές και S_1S_2 η ένωση των ακολουθιών S_1 και S_2

Για παράδειγμα, θεωρούμε ιδανικό ΣΔ διαμορφωτή 1^{ns} τάξης με dc είσοδο $u = \frac{2}{7}$. Ακολουθούμε τα βήματα του αλγόριθμου:

1. $\hat{u} = \frac{1+u}{2} = \frac{9}{14}$
2. $\hat{u} = [1, 1, 1, 4]$
3. $S_0 = 0$
 $S_1 = 1(0)^{1-1} = 1$
 $S_2 = S_0(S_1)^{a_2} = 0(1)^1 = 01$
 $S_3 = S_1(S_2)^{a_3} = 1(01)^1 = 101$
 $S_4 = S_2(S_3)^{a_4} = 01(101)^4 = 01101101101101$

Σε αυτό το σημείο, οφείλουμε να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

1. Με βάση τον ευκλείδιο αλγόριθμο, όλες οι περιοδικές ακολουθίες εξόδου ξεκινάνε με τα 2 bit 10 ή 01
2. Αν εναλλάξουμε τα 2 πρώτα bits της ακολουθίας εξόδου, προκύπτει μια ολισθισμένη εκδοχή αυτής [14]

3.2.4 Μη ιδανικός MOD1 και ανάλυση της δυναμικής του

Στην προσέγγιση του ιδανικού MOD1 υποθέσαμε ότι ο ολοκληρωτής είναι ιδανικός, δηλαδή δεν έχει απώλειες. Λαμβάνοντας υπόψιν τις ατέλειες του ολοκληρωτή η εξίσωση 2.1 γενικεύεται ως εξής:

$$x[n+1] = px[n] + g(u - \text{sgn}(x[n])) \quad (3.13)$$

Για $p = g = 1$ επιστρέφουμε στην περίπτωση του ιδανικού διαμορφωτή. Η παράμετρος g δεν επηρεάζει σημαντικά τη δυναμική του συστήματος. Για παράδειγμα, για $p = 1$, η δυναμική στο διάστημα $[g(u-1), g(u+1)]$ είναι η ίδια με αυτή που εξάγαμε στην προηγούμενη ενότητα για το διάστημα $[(u-1), (u+1)]$. Οπότε, για χάρη ευκολίας, από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε ότι $g = 1$.

Θεωρούμε την απεικόνιση $F : [u-1, u+1] \rightarrow [u-1, u+1]$ με τύπο

$$F(x) = px + u - \text{sgn}(x) \quad (3.14)$$

Με τον γνωστό μετασχηματισμό $y = \frac{x+1-u}{2}$ μετατρέπουμε την F στην $\hat{F} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με τύπο

$$\hat{F}(y) = py + \frac{pu - p + 1 - \text{sgn}(2y + u - 1)}{2} = \begin{cases} py + \frac{pu-p}{2} & , y \geq \frac{1-u}{2} \\ py + \frac{pu-p+2}{2} & , y < \frac{1-u}{2} \end{cases} \quad (3.15)$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι $F(0) < F(1) \Leftrightarrow p < 1$ και $F(0) > F(1) \Leftrightarrow p > 1$. Οπότε, για $p < 1$ το σύστημα εμφανίζει περιοδικές τροχιές για dc ρητές εισόδους, ενώ για $p > 1$ το σύστημα

εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά. Συνήθως, φυσικοί περιορισμοί δεν επιτρέπουν στο p να λάβει τιμές μεγαλύτερες του 1. Γι' αυτό, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για την περίπτωση που $0 < p < 1$. Αυτή περίπτωση, καθώς και η χαοτική περίπτωση έχει μελετηθεί εκτενώς από τους Feely και Chua [14, 15].

Υποθέτουμε ότι υπάρχει περιοδική τροχιά της απεικόνισης μήκους L . Τότε:

$$\begin{aligned}
 x[n+1] &= px[n] + u - \text{sgn}(x[n]) \\
 x[n+2] &= px[n+1] + u - \text{sgn}(x[n+1]) = p^2x[n] + (p+1)x - p\text{sgn}(x[n]) + \text{sgn}(x[n+1]) \\
 &\vdots \\
 x[n+L] &= px[n+L-1] + u - \text{sgn}(x[n+L-1]) = (p^Lx[n] + (p^{L-1} + \dots + p+1)x \\
 &\quad - \sum_{i=n}^{n+L-1} p^{n+L-1-i} \text{sgn}(x[i]))
 \end{aligned}$$

(στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το άθροισμα γεωμετρικής προόδου). Όμως $x[n] = x[n+L]$, άρα

$$x[n] = \frac{1}{1-p}u - \frac{1}{1-p^L} \sum_{i=n}^{n+L-1} p^{n+L-1-i} \text{sgn}(x[i]) \quad (3.16)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω εξίσωση για να ελέγξουμε αν μια δεδομένη περιοδική ακολουθία μπορεί να υπάρξει ως ακολουθία εξόδου του μη ιδανικού MOD1. Συγκεκριμένα, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 3.16 την δεδομένη ακολουθία, στους όρους προσήμου sgn .
2. Υπολογίζουμε την κατάσταση $x[k]$, συναρτήσει των u, p .
3. Επιβάλλουμε τις συνθήκες προσήμου πάνω στις καταστάσεις $x[k]$, ώστε να υπάρχει η δεδομένη ακολουθία εξόδου.
4. Υπολογίζουμε το διάστημα στο οποίο πρέπει να ανήκει η είσοδος u έτσι ώστε να υπάρχει η δεδομένη ακολουθία εξόδου.

Για παράδειγμα, θέλουμε να δούμε αν υπάρχει η περιοδική ακολουθία εξόδου $\bar{10}$:

1. $\text{sgn}(x[1]) = +1, \text{sgn}(x[2]) = -1$

- 2.

$$\begin{aligned}
 x[1] &= \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p^2}(p-1) \\
 x[2] &= \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p^2}(-p+1)
 \end{aligned}$$

3. Πρέπει να ισχύει ότι:

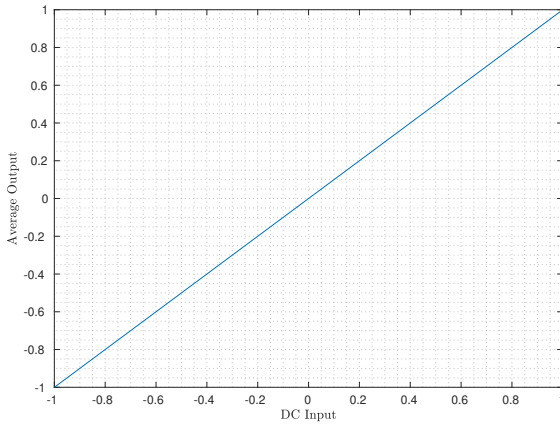
$$\frac{1}{1-p}u - \frac{1}{1-p^2}(p-1) \geq 0$$

$$\frac{1}{1-p}u - \frac{1}{1-p^2}(-p+1) < 0$$

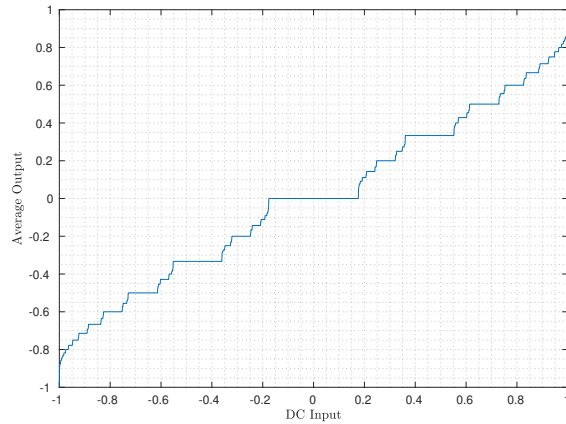
4. Άρα, για την είσοδο u πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{p-1}{1+p} \leq u < \frac{1-p}{1+p}$$

Από αυτό το απλό παράδειγμα φαίνεται ότι, στην περίπτωση του μη ιδανικού MOD1, εμφανίζεται κατάσταση κλειδώματος (locking) στη λειτουργία του διαμορφωτή, με την έννοια ότι μια συγκεκριμένη περιοδική ακολουθία εξόδου επιμένει για ένα εύρος εισόδων εντός ενός διαστήματος. Παρακάτω παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης ενός ιδανικού και ενός μη-ιδανικού MOD1 ($p=0.7$) για 2000 τιμές εισόδου στο $[0, 1]$, όπου υπολογίσαμε τη μέση τιμή της ακολουθίας εξόδου:



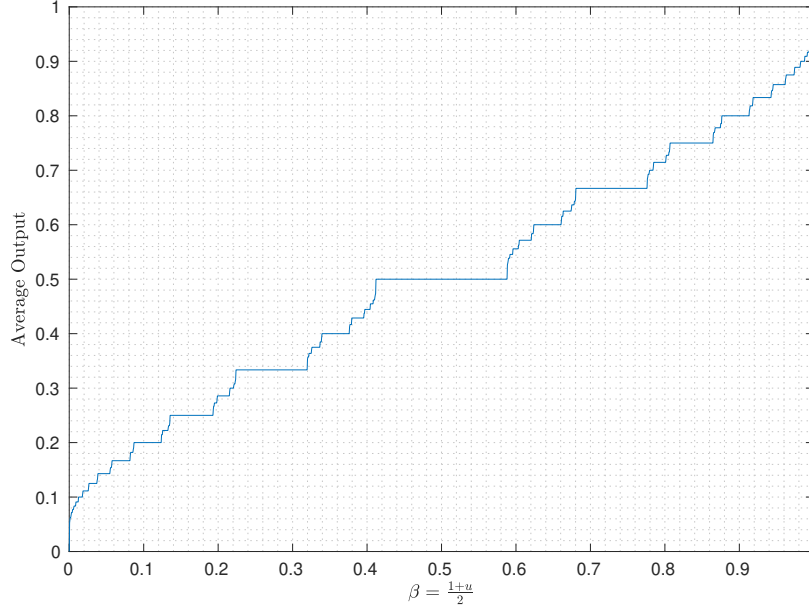
(a) Ιδανικός MOD1



(b) Μη-ιδανικός MOD1 ($p=0.7$)

Εικόνα 3.2: Μέση τιμή της ακολουθίας εξόδου σε μήκος μιας περιόδου

Βλέπουμε ότι, στον ιδανικό MOD1, η μέση τιμή της ακολουθίας εξόδου ισούται ακριβώς με τη ρητή dc είσοδο, ενώ στον μη-ιδανικό MOD1, οι περιοδικές ακολουθίες εξόδου παραμένουν για ένα εύρος των τιμών της εισόδου. Η εικόνα 3.2b ονομάζεται και devil's staircase [16]. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την αντίστοιχη ισοδύναμη γραφική της 3.2b για το μετασχηματισμένο σύστημα \hat{F} .



Εικόνα 3.3: Απεικόνιση Cantor

Η γραφική 3.3 είναι ουσιαστικά η γραφική της συνάρτησης Cantor, που απεικονίζει έναν αριθμό $c \in \mathcal{C}$ στο $[0, 1]$. Όπως βλέπουμε, η συνάρτηση Cantor είναι σχεδόν παντού σταθερή, δηλαδή το σύνολο των σημείων στα οποία δεν είναι σταθερή έχει μέτρο 0, και τα διαστήματα στα οποία είναι σταθερή είναι τα διαστήματα τα οποία αφαιρέθηκαν από το $[0, 1]$ κατά τη διαδικασία της κατασκευής του συνόλου Cantor.

Επιπλέον, στο [14] αποδεικνύεται ότι οι δομές των περιοδικών ακολουθιών εξόδου που βρίσκονται με χρήση του ευκλείδιου αλγόριθμου εντοπίζονται και στον μη ιδανικό MOD1. Συγκεκριμένα, για να είναι μια περιοδική ακολουθία με περίοδο L , $V = (v_1, \dots, v_L)$, που παράγεται από τον ευκλείδιο αλγόριθμο, αποδεκτή στον μη ιδανικό MOD1 πρέπει, από την εξίσωση 3.16, να ισχύει ότι:

$$\frac{\sum_{i=k_1}^{k_1+L-1} p^{k_1+L-1-i} y_i}{p^{L-1} + \dots + p + 1} \geq u > \frac{\sum_{i=k_2}^{k_2+L-1} p^{k_2+L-1-i} y_i}{p^{L-1} + \dots + p + 1} \quad (3.17)$$

όπου τα k_1, k_2 επιλέχθηκαν έτσι ώστε $y_{k_1} = -1$, $y_{k_2} = 1$ και $y_i = \begin{cases} 1 & , v_i = 1 \\ -1 & , v_i = 0 \end{cases}$. Με βάση αυτή την ανισότητα, και συγκεκριμένα βρίσκοντας το μέγιστο κάτω φράγμα και το ελάχιστο άνω φράγμα για την είσοδο u αποδεικνύεται ότι οι περιοδικές ακολουθίες που προκύπτουν από τον ευκλείδιο αλγόριθμο εμφανίζονται και στον μη ιδανικό MOD1 [14].

Μάλιστα, οι ακολουθίες που προκύπτουν από τον ευκλείδιο αλγόριθμο είναι οι μοναδικές που μπορούν να εμφανιστούν. Έστω ότι για τον μη ιδανικό MOD1 μπορεί να γίνει αποδεκτή μια ακολουθία εξόδου η οποία δεν παράγεται από τον ευκλείδιο αλγόριθμο. Συνεπώς, η αντίστοιχη είσοδος u πρέπει να ανοίκει στο \mathcal{C} . Όμως, όπως είδαμε, κάθε περιοδική ακολουθία εξόδου επιμένει για ένα διάστημα εισόδων, αλλά το \mathcal{C} δεν περιέχει διαστήματα.

Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε μια σημαντική παρατήρηση. Στην περίπτωση του ιδανικού MOD1, είδαμε ότι ο αριθμός στροφής λαμβάνει ρητές τιμές για ρητές εισόδους, ενώ στον μη ιδανικό MOD1 ο αριθμός στροφής λαμβάνει ρητές τιμές πάνω σε μη κενά διαστήματα. Επειδή ως γνωστόν $\mu(\mathbb{Q}) = 0$, ως αριθμήσιμο σύνολο [9], στον ιδανικό MOD1 ($p=1$) σχεδόν καμία dc είσοδος u δεν δίνει περιοδική ακολουθία εξόδου, ενώ στον μη ιδανικό MOD1 ($p < 1$) σχεδόν όλες οι dc είσοδοι u δίνουν περιοδικές ακολουθίες εξόδου.

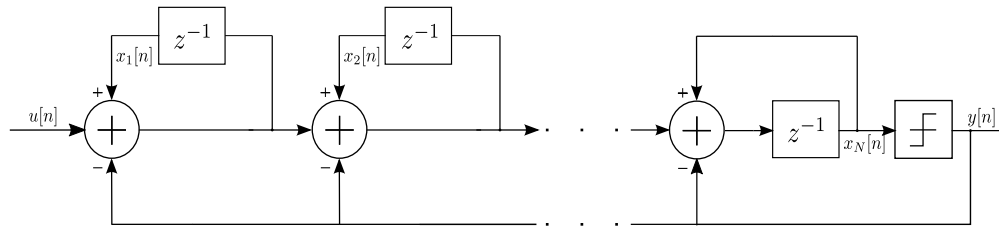
3.3 Ανάλυση ΣΔ Διαμορφωτών Υψηλότερης τάξης

Δυστυχώς, η μαθηματική θεωρία των απεικονίσεων του μοναδιαίου κύκλου παύει να ισχύει για τους ΣΔ Διαμορφωτές τάξης ≥ 2 . Συνεπώς, καταφεύγουμε στην ανάλυση της ευστάθειας αυτών των διαμορφωτών, έργο εξαιρετικά πιο δύσκολο σε σχέση με τον MOD1.

Παρακάτω, θα εξάγουμε τις σχέσεις που περιγράφουν τη δυναμική του απλούστερου N -οστής τάξης ΣΔ Διαμορφωτή, θα δούμε τι επίδραση έχουν οι αρχικές συνθήκες και πώς αυτές συνδέονται με την ύπαρξη ή όχι περιοδικών τροχιών, θα εφαρμόσουμε τις παραπάνω εξισώσεις για την απλή περίπτωση του MOD2 και θα δούμε τι συνεπάγεται η ευστάθεια των ΣΔ Διαμορφωτών για την ύπαρξη περιοδικών ακολουθιών εξόδου.

3.3.1 N -οστής τάξης ΣΔ Διαμορφωτής (MODN)

Στην εικόνα 3.4 ξαναπαρουσιάζουμε τον απλούστερο ΣΔ Διαμορφωτή N -οστής τάξης:



Εικόνα 3.4: N -οστής τάξης ΣΔ Διαμορφωτής

Η δυναμική αυτού περιγράφεται από τις εξής εξισώσεις κατάστασης:

$$\mathbf{x}[n+1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{bmatrix} \text{sgn}(x_N[n]) \quad (3.18)$$

ή σε πιο συμπαγή μορφή:

$$\mathbf{x}[n+1] = A\mathbf{x}[n] + Bu - C\text{sgn}(x_N[n]) \quad (3.19)$$

όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$ και

$\mathbf{x}[n] = [x_1[n] \ x_2[n] \ \dots \ x_N[n]]^\top \in \mathbb{R}^N$ Από την παραπάνω σχέση, εύκολα προκύπτει ότι:

$$\mathbf{x}[n] = A^n \mathbf{x}[0] + \sum_{i=0}^{n-1} A^i [Bu - C \operatorname{sgn}(x_N[n-1-i])], \quad \forall n \geq 0 \quad (3.20)$$

Αναλύοντας τον πίνακα A σε μορφή Jordan βρίσκουμε ότι:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{n}{1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+N-2}{N-1} & \binom{n+N-3}{N-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Επιπλέον, μπορούμε να δείξουμε επαγωγικά ότι:

$$\sum_{i=0}^{n-1} A^i = \begin{bmatrix} \binom{n}{1} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{n}{2} & \binom{n}{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+N-2}{N} & \binom{n+N-3}{N-1} & \dots & \binom{n}{1} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Επομένως:

$$\sum_{i=0}^{n-1} A^i B = \begin{bmatrix} \binom{n}{1} \\ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \\ \vdots \\ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n+N-2}{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \binom{n}{1} \\ \binom{n+1}{2} \\ \vdots \\ \binom{n+N-1}{N} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του τριγώνου του Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Συνεπώς, μπορούμε να αναλύσουμε την σχέση 3.20 ανά γραμμή και να εξάγουμε τις εξής N εξισώσεις:

$$x_k[n] = \sum_{i=1}^k \binom{n+k-1-i}{k-i} x_i[0] + \binom{n+k-1}{k} u - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,k} \operatorname{sgn}(x_N[n-1-j]), \quad \forall 1 \leq k \leq N \quad (3.24)$$

όπου

$$a_{j,k} = \sum_{i=1}^k \binom{j+k-1-i}{k-i} i$$

Για να υπάρχει περιοδική τροχιά περιόδου L θα πρέπει, από την εξίσωση 3.20 να ισχύει ότι:

$$(\mathbb{I} - A^L) \mathbf{x}[0] = \sum_{i=0}^{L-1} A^i [Bu - C \operatorname{sgn}(x_N[L-1-i])] \quad (3.25)$$

Με παρόμοιο τρόπο με προηγουμένως ανά γραμμή, παίρνουμε ότι:

$$-\sum_{i=1}^{k-1} \binom{L+k-i-1}{k-i} x_i[0] = \binom{L+k-1}{k} u - \sum_{j=0}^{L-1} a_{j,k} \text{sgn}(x_N[L-1-j]), \quad \forall 1 \leq k \leq N \quad (3.26)$$

Λύνοντας αυτή τη σχέση ως προς το u έχουμε ότι:

$$u = \frac{1}{\binom{L+k-1}{k}} \left[-\sum_{i=1}^{k-1} \binom{L+k-i-1}{k-i} x_i[0] + \sum_{j=0}^{L-1} a_{j,k} \text{sgn}(x_N[L-1-j]) \right], \quad \forall 1 \leq k \leq N \quad (3.27)$$

Βλέπουμε ότι αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει περιοδική τροχιά είναι η dc είσοδος u να είναι ρητός αριθμός, δεδομένου ότι οι αρχικές συνθήκες είναι ρητές. Μάλιστα, για $k=1$ παίρνουμε και πάλι ότι :

$$u = \frac{\sum_{j=0}^{L-1} \text{sgn}(x_N[L-1-j])}{L}$$

όπως και στον MOD1. Παρατηρούμε επίσης ότι, σε αντίθεση με τον MOD1, σε υψηλότερης τάξης διαμορφωτές οι αρχικές συνθήκες παίζουν ρόλο στην ύπαρξη περιοδικών τροχιών. Μπορούμε να λύσουμε την 3.26 ως προς τις αρχικές συνθήκες $x_k[0]$:

$$x_k[0] = \frac{\sum_{j=0}^{L-1} a_{j,k+1} \text{sgn}(x_N[n-1-j]) - \binom{L+k}{k+1} u - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{L+k-i-1}{k-i} x_i[0]}{\binom{L+k}{k}}, \quad \forall 1 \leq k \leq N-1 \quad (3.28)$$

Για $k=1$:

$$x_1[0] = \frac{\sum_{j=0}^{L-1} a_{j,2} \text{sgn}(x_N[n-1-j]) - \binom{L+1}{2} u}{\binom{L+1}{1}} \in \mathbb{Q}$$

ανν $u \in \mathbb{Q}$. Από τη σχέση 3.28 μπορούμε να εκφράσουμε τις υπόλοιπες αρχικές συνθήκες συναρτήσει της εισόδου u και της αρχικής συνθήκης $x_1[0]$ ως:

$$x_k[0] = l_k(u, x_1[0]), \quad 2 \leq k \leq N-1$$

όπου l_k γραμμικές συναρτήσεις. Αυτό σημαίνει ότι, αν κάποια από τις πρώτες $N-1$ αρχικές συνθήκες είναι ρητή, τότε και οι υπόλοιπες $N-2$ θα είναι ρητές.

Επομένως, για ρητή dc είσοδο, ικανή συνθήκη για να μην υπάρχουν περιοδικές τροχιές είναι οι $N-1$ πρώτες αρχικές συνθήκες να είναι άρρητες. Βλέπουμε δηλαδή ότι η τελευταία αρχική συνθήκη $x_N[0]$ δεν παίζει κάποιο ρόλο στην ύπαρξη ή όχι περιοδικών τροχιών. Αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς παρατηρούμε ότι ο πίνακας $\mathbb{I} - A^L$ δεν είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή δεν είναι πλήρους τάξης, συγκεκριμένα $\text{rank}(\mathbb{I} - A^L) = N-1$, επομένως, από τη σχέση 3.25, κάποια από τις αρχικές συνθήκες δεν θα επηρέαζε την ύπαρξη ή μη περιοδικών τροχιών.

Επιπλέον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση 3.26 ή τις αναπτυγμένες τις μορφές 3.27, 3.28 για να ελέγξουμε αν μια περιοδική ακολουθία εξόδου είναι επιτρεπτή, για συγκεκριμένες τιμές εισόδου και αρχικών συνθηκών, ή να βρούμε αν υπάρχουν τιμές τις εισόδου ή κατάλληλες αρχικές συνθήκες έτσι ώστε μια συγκεκριμένη περιοδική ακολουθία να είναι

επιτρεπτή. Σε αυτή τη διαδικασία μας βοηθάει η παρατήρηση ότι δεν χρειάζεται να δοκιμάσουμε όλες τις 2^L ακολουθίες μήκους L . Συγκεκριμένα, μπορούμε να αποκλείσουμε αυτές τις ακολουθίες από τις 2^L που έχουμε κύρια περίοδο μικρότερη από L , καθώς και αυτές που είναι ισοδύναμες κατά μία κυκλική ολίσθηση [6]. Οι ακολουθίες που απομένουν ονομάζονται κύριες. Παρακάτω παρουσιάζουμε τον αριθμό των κύριων ακολουθιών για μήκη από 1 μέχρι 16:

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p_L	2	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335	630	1161	2182	4080

Πίνακας 3.1: Αριθμός κύριων ακολουθιών για διάφορα μήκη

Αν θεωρήσουμε ρητή είσοδο $u = \frac{b}{a}$ και ρητές αρχικές συνθήκες, μπορούμε να γράψουμε την 3.24

$$x_k[n] = \sum_{i=1}^k \binom{n+k-1-i}{k-1} x_i[0] + \binom{n+k-1}{k} \frac{b}{a} - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,k} \text{sgn}(x_N[n-1-j]) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax_1[n] = ax_1[0] + nb - a \sum_{j=0}^{n-1} \text{sgn}(x_N[n-1-j]) & , k = 1 \\ d_k x_k[n] = d_k \sum_{i=1}^k \binom{n+k-1-i}{k-1} x_i[0] + d_k \binom{n+k-1}{k} u - d_k \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} \text{sgn}(x_N[n-1-j]) & , k \geq 2 \end{cases} \quad (3.29)$$

όπου $d_k = \text{lcd}(u, x_1[0], \dots, x_k[0])$, $1 \leq k \leq N-1$, lcd : ελάχιστος κοινός παρονομαστής. Επομένως παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} a(x_1[n] - x_1[0]) &\in \mathbb{Z} \\ d_1(x_2[n] - x_2[0]) &\in \mathbb{Z} \\ &\vdots \\ d_k(x_k[n] - x_k[0]) &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\{(x_1[n], x_2[n], \dots, x_N[n])\} \subseteq \{(x_1[0] + \frac{m_0}{a}, x_2[0] + \frac{m_1}{d_1}, \dots, x_N[0] + \frac{m_{N-1}}{d_{N-1}}), m_1, \dots, m_{N-1} \in \mathbb{Z}\} \quad (3.30)$$

Συνεπώς, οι καταστάσεις κινούνται πάνω σε ένα ρητό πλέγμα. Επομένως, αν το σύστημα είναι φραγμένο, τότε θα είναι εν τέλει περιοδικό.

Τέλος, αποδεικνύουμε ποια είναι η γενική μορφή της εξίσωσης διαφορών για τον MODN

Πρόταση 3. Η εξίσωση διαφορών για το σύστημα 3.19 θα είναι η

$$\sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N}{i} x[n+N-1] = u + \sum_{i=1}^N (-1)^i \binom{N}{i} \text{sgn}(x[n+N-1]) \quad (3.31)$$

όπου $x = x_N$ η τελευταία κατάσταση

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_k[n+m-1] = u + \sum_{i=1}^m (-1)^i \binom{m}{i} \operatorname{sgn}(x_N[n+m-1]), \quad \forall 1 \leq m \leq N$$

Για ευκολία, θα γράφουμε $y[n] = \operatorname{sgn}(x_N[n])$. Θα δείξουμε το ζητούμενο επαγωγικά:

- Για $k=1$ θα έχουμε ότι $x_1[n+1] - x_1[n] = u - y[n]$, που ισχύει
- Έστω ότι ισχύει για $m = k$, δηλαδή $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x_k[n+k-1] = u + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} \operatorname{sgn}(x_N[n+k-1])$
- Για $m=k+1$: Από την εξίσωση 3.19 έχουμε ότι:

$$x_{k+1}[n+1] = \sum_{i=1}^{k+1} x_i[n] + u - (k+1)y[n]$$

$$x_k[n+1] = \sum_{i=1}^k x_i[n] + u - ky[n]$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε ότι:

$$x_{k+1}[n+1] = x_k[n] + x_{k+1}[n] - y[n] \quad (3.32)$$

Άρα θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x_{k+1}[n+k-i] &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x_k[n+k-i] + \\ &+ \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x_{k+1}[n+k-1-i] - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} y[n+k-1-i] \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x_{k+1}[n+k-i] &= u + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} y[n+k-1] + \\ &+ \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x_{k+1}[n+k-1-i] - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} y[n+k-1-i] \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x_{k+1}[n+k+1-i] &= u + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} y[n+k+1-i] + \\ &+ \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x_{k+1}[n+k-i] - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} y[n+k-i] \end{aligned}$$

Χάριν ευκολίας, ορίζουμε τους συντελεστές $a_{i,k} := (-1)^i \binom{k}{i}$. Εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

1. $a_{k,k} = -a_{k+1,k+1}$
2. $a_{i+1,k} - a_{i,k} = a_{i+1,k+1}$

Συνεπώς, θα έχουμε ότι:

$$\sum_{i=0}^k a_{i,k} x_{k+1}[n+k+1-i] - \sum_{i=0}^k a_{i,k} x_{k+1}[n+k-i] = u +$$

$$\sum_{i=1}^k a_{i,k} y[n+k+1-i] - \sum_{i=0}^k a_{i,k} y[n+k-i]$$

Το δεξιό μέλος της εξίσωσης γράφεται ως:

$$a_{0,k} x_{k+1}[n+k+1] - \sum_{i=1}^k (a_{i+1,k} - a_{i,k}) x_{k+1}[n+k+1-i] - a_{k,k} x_{k+1}[n] =$$

$$a_{0,k} x_{k+1}[n+k+1] - \sum_{i=1}^k a_{i+1,k+1} x_{k+1}[n+k+1-i] + a_{k+1,k+1} x_{k+1}[n] =$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} a_{i,k+1} x_{k+1}[n+k+1-i]$$

ενώ το αριστερό μέλος θα γράφεται, με παρόμοιο τρόπο, ως: $u + \sum_{i=1}^{k+1} a_{i,k+1} y[n+k+1-i]$

Άρα :

$$\sum_{i=0}^{k+1} a_{i,k+1} x_{k+1}[n+k+1-i] = u + \sum_{i=1}^{k+1} a_{i,k+1} y[n+k+1-i]$$

Επομένως θα ισχύει και για $m = k + 1$, συνεπώς το ζητούμενο ισχύει από μαθηματική επαγωγή.

□

Εξισώσεις διαφορών της μορφής

$$\sum_{i=0}^M a_i x[n+M-i] = f(x[n], \dots, x[n+M-1])$$

έχουν μελετηθεί στην βιβλιογραφία ως προς την ύπαρξη περιοδικών τροχιών [17, 18], κάνοντας χρήση του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer (Brouwer fixed point theorem) [19]. Όμως, για να γίνει χρήση αυτού του θεωρήματος, πρέπει η f να είναι συνεχής, κάτι που στην περίπτωσή μας δεν ισχύει. Ίσως θα μπορούσε να εφαρμοστεί κάποια γενίκευση αυτού του θεωρήματος για συναρτήσεις με σημείο ασυνέχειας [20].

3.3.2 Αποτελέσματα για τον MOD2

Από τη σχέση 3.24, για τον MOD2, έχουμε ότι:

$$x_1[n] = x_1[0] + nu - \sum_{j=0}^{n-1} \text{sgn}(x_2[n-1-j]) \quad (3.33)$$

$$x_2[n] = nx_1[0] + x_2[0] + \frac{n(n+1)}{2}u - \sum_{j=0}^{n-1} (j+2) \text{sgn}(x_2[n-1-j]) \quad (3.34)$$

Η ασυνέχεια στο 0 χωρίζει τον χώρο καταστάσεων (x_1, x_2) σε δύο τμήματα:

$$D^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\}$$

$$D^- = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$$

Σε κάθε ένα από αυτά τα τμήματα, η δυναμική του MOD2 είναι γραμμική, και, απαλείφοντας το n , βρίσκουμε ότι η τροχιά του συστήματος βρίσκεται πάνω στις παραβολές:

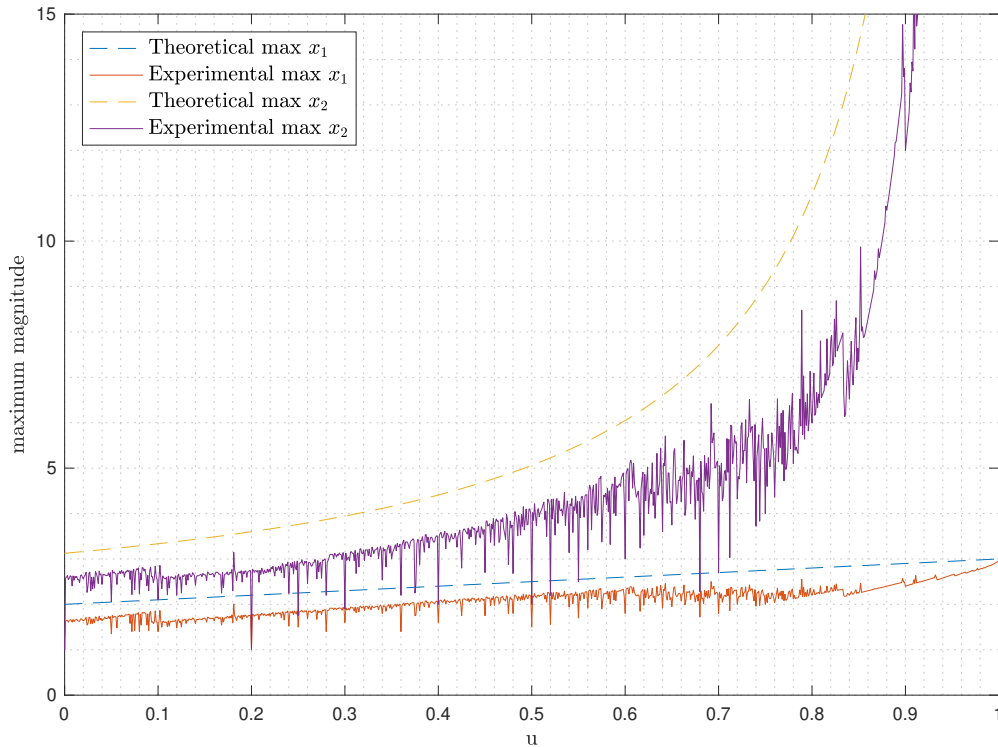
$$x_2 = \frac{1}{2} \frac{(x_1 - x_{1,0})^2}{c - u} + x_{2,0} + (x_1 - x_{1,0}) \left(x_{1,0} + \frac{1}{2} \frac{u - 3c}{c - u} \right) \quad (3.35)$$

όπου $c = 1$ αν $(x_1, x_2) \in D^+$ και $c = -1$ αν $(x_1, x_2) \in D^-$. Με βάση τις εξισώσεις των παραβολών μπορούμε να βρούμε το θετικά αναλλοίωτο σύνολο του χώρου καταστάσεων, δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τα σημεία που απεικονίζονται πάλι μέσα στο ίδιο σύνολο μέσω της απεικόνισης του MOD2 2.12 [21]. Με αυτή τη διαδικασία, μπορούν να βρεθούν φράγματα για τις καταστάσεις x_1, x_2 . Αυτή η τακτική ακολουθήθηκε στο [22] και αποδείχθη ότι:

$$|x_1| \leq |u| + 2 \quad (3.36)$$

$$|x_2| \leq \frac{(5 - |u|)^2}{8(1 - |u|)} \quad (3.37)$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης που επιβεβαιώνουν την ορθότητα των φραγμάτων:



Εικόνα 3.5: Φράγματα των καταστάσεων x_1, x_2 του MOD2

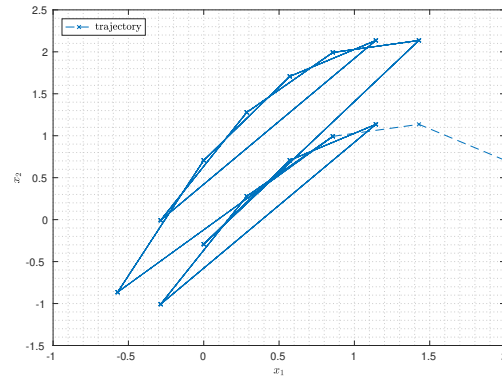
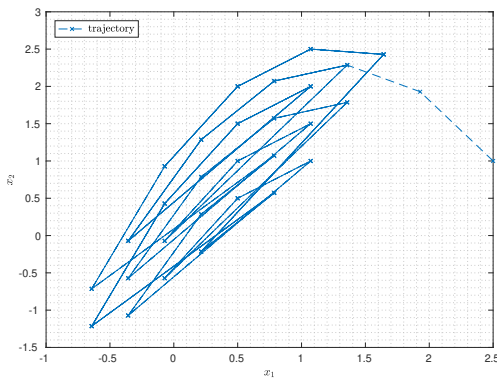
Οι Farrel, Feely [23] υπολόγισαν φράγματα για τις καταστάσεις x_1, x_2 βασιζόμενοι στο γεγονός ότι ο αριθμός N_- των συνεχόμενων αρνητικών επαναλήψεων εξόδου ($\text{sgn}(x_2[n]) = -1$) είναι φραγμένος. Επιπλέον, οι Pinault, Lopresti [24] έδειξαν την ευστάθεια του MOD2 για μια οικογένεια εισόδων της μορφής :

$$u[n] = u_{dc} + v[n] \quad (3.38)$$

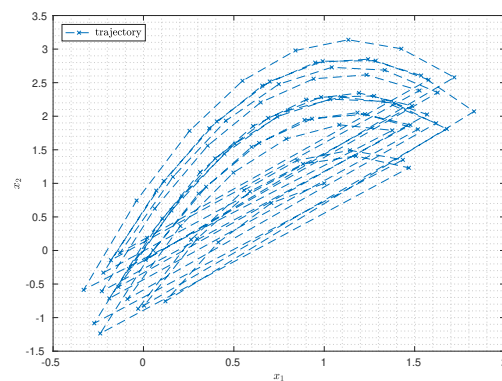
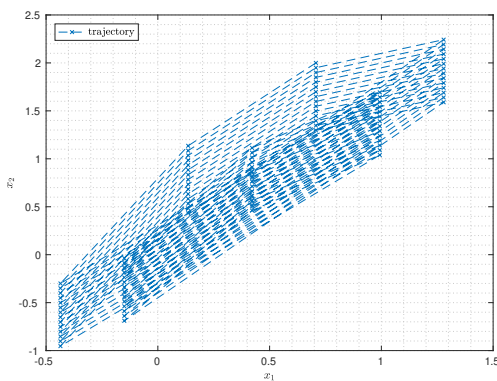
όπου η $v[n]$ μπορεί να γραφεί σαν πεπερασμένο άθροισμα ημιτόνων :

$$v[n] = \sum_{i=1}^M a_k \sin(n\omega_i + \phi_i)$$

Τέλος παρουσιάζουμε τις εξής γραφικές που επιβεβαιώνουν τα γενικά αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου:



(a) Περιοδική τροχιά με $x_1[0] = 2.5, x_2[0] = 1$, $u = \frac{3}{7}$ (b) Περιοδική τροχιά με $x_1[0] = 2, x_2[0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $u = \frac{3}{7}$



(c) Μη περιοδική τροχιά με $x_1[0] = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2[0] = 1$, $u = \frac{3}{7}$ (d) Μη περιοδική τροχιά με $x_1[0] = 1, x_2[0] = 1$, $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Εικόνα 3.6: Τροχιές MOD2 με διαφορετικές αρχικές συνθήκες $x_1[0], x_2[0]$ και εισόδους u

Στην εικόνα 3.6a παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι εν τέλει περιοδικό για ρητή dc είσοδο και ρητές αρχικές συνθήκες, στην εικόνα 3.6b παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι και πάλι περιοδικό αν και η αρχική κατάσταση $x_2[0]$ είναι άρρητη, και στις εικόνες 3.6c, 3.6d παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι απεριοδικό λόγω της άρρητης αρχικής συνθήκης $x_1[0]$ και της άρρητης dc εισόδου αντίστοιχα.

3.3.3 Αποτελέσματα για τον MOD3

Από τη σχέση 3.24, για τον MOD3, έχουμε ότι:

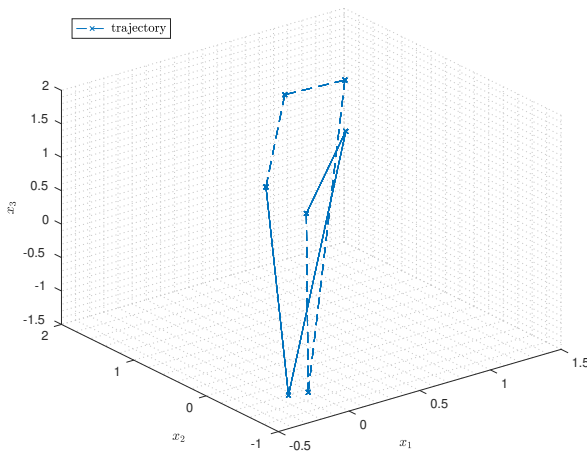
$$x_1[n] = x_1[0] + nu - \sum_{j=0}^{n-1} \text{sgn}(x_3[n-1-j]) \quad (3.39)$$

$$x_2[n] = nx_1[0] + x_2[0] + \frac{n(n+1)}{2}u - \sum_{j=0}^{n-1} (j+2)\text{sgn}(x_3[n-1-j]) \quad (3.40)$$

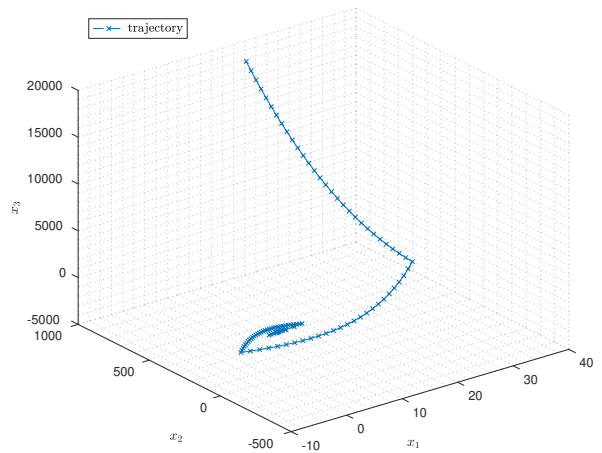
$$x_3[n] = \frac{n(n+1)}{2}x_1[0] + nx_2[0] + x_3[0] + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j^2 + 5j + 6}{2}\right)\text{sgn}(x_3[n-1-j]) \quad (3.41)$$

Από αυτές τις εξισώσεις είναι πολύ πιο δύσκολο να εξάγουμε τη μορφή των τροχιών του συστήματος.

Ο Wang [25] έδειξε ότι δεν υπάρχει καθολική ευστάθεια για τον MOD3. Αν οι παράμετροι $u, x_1[0], x_2[0]$ επιλεγθούν έτσι ώστε ο MOD3 να είναι ευσταθής, τότε θα έχει και περιοδικές ή εν τέλει περιοδικές τροχιές. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα προσομοίωσης για 2 διαφορετικές τιμές της dc εισόδου u και για σταθερές αρχικές συνθήκες $x_1[0] = x_2[0] = 1$:



(a) Φραγμένη περιοδική τροχιά για $u = \frac{3}{7}$



(b) Μη-φραγμένη τροχιά για $u = \frac{4}{7}$

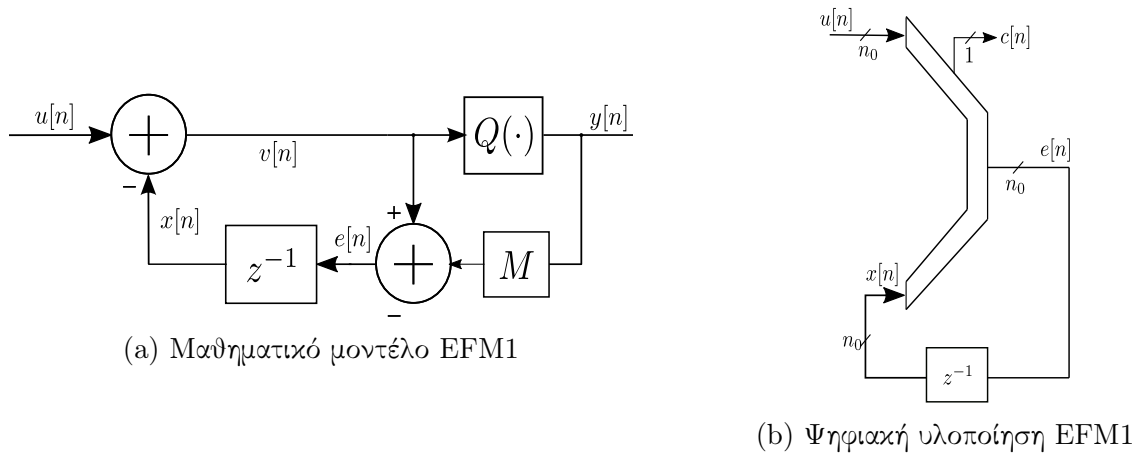
Εικόνα 3.7: Τροχιές MOD3 με διαφορετικές εισόδους u

3.4 Ανάλυση Error-Feedback τοπολογιών

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε τη δυναμική τοπολογιών ΣΔ Διαμορφωτών τύπου Error-Feedback (EFM) με σταθερή είσοδο [26]. Όπως θα παρατηρήσουμε και στη συνέχεια, η δυναμική αυτών εμφανίζει ομοιότητες με τη δυναμική των απλών ΣΔ Διαμορφωτών

3.4.1 Ανάλυση EFM1

Στην εικόνα παρουσιάζεται ο EFM1, καθώς και η ψηφιακή υλοποίησή του. Ο EFM1 μπορεί να υλοποιηθεί ψηφιακά με έναν ψηφιακό συσσωρευτή.



Εικόνα 3.8: Error-Feedback διαμορφωτής 1ης τάξης

Θεωρούμε ότι όλα τα σήματα λαμβάνουν ακέραιες τιμές. Το carry-bit εξόδου $c[n]$ αντιστοιχίζεται στο $y[n]$ και προκύπτει από την υπερχείληση του συσσωρευτή. Για όλα τα υπόλοιπα σήματα η αντιστοίχιση είναι προφανής.

Θεωρούμε, επίσης, ότι η είσοδος $u[n]$ έχει μια $n_0 - bit$ αναπαράσταση. Η 1-bit έξοδος $y[n]$, με βάρος $M = 2^{n_0}$, που ονομάζεται modulus του διαμορφωτή, αφαιρείται από το σήμα εισόδου στον κβαντιστή $v[n]$ και έτσι προκύπτει το σφάλμα κβαντισμού $e[n]$. Αυτό το σφάλμα προστίθεται, καθυστερημένο κατά ένα δείγμα, στην είσοδο $u[n]$.

Τα $u[n], x[n]$ ανήκουν στο σύνολο $\{0, 1, \dots, 2^{n_0} - 1\}$, αφού θεωρήσαμε ότι έχουν μια $n_0 - bit$ αναπαράσταση, συνεπώς το $v[n] = u[n] + x[n]$ θα ανήκει στο σύνολο: $\{0, 1, \dots, 2^{n_0}, \dots, 2^{n_0+1} - 2\}$. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$e[n] = v[n] - My[n] \tag{3.42}$$

άρα και το $e[n]$ θα ανήκει στο $\{0, 1, \dots, 2^{n_0}, \dots, 2^{n_0+1} - 2\}$.

Οι εξισώσεις διαφορών που περιγράφουν τη δυναμική του συστήματος είναι οι:

$$v[n] = u[n] + x[n] \quad (3.43)$$

$$y[n] = Q(v[n]) = \begin{cases} 1 & , v[n] \geq M \\ 0 & , v[n] < M \end{cases} \quad (3.44)$$

$$x[n] = \begin{cases} e[n-1] & , n \geq 1 \\ x[0] & , n = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις :

1. $v[n] \geq M$. Τότε θα έχουμε ότι

$$e[n] = v[n] - M$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τα σύνολα στα οποία ανήκουν τα e, v θα έχουμε ότι

$$e[n] = v[n] \pmod{M}$$

2. $v[n] < M$. Τότε θα έχουμε ότι

$$e[n] = v[n]$$

και πάλι λαμβάνοντας υπόψιν τα σύνολα στα οποία ανήκουν τα e, v θα έχουμε ότι

$$e[n] = v[n] \pmod{M}$$

Επομένως θα ισχύει ότι

$$e[n] = v[n] \pmod{M} = (u[n] + e[n-1]) \pmod{M} \forall n \geq 0 \quad (3.46)$$

Μπορούμε να κανονικοποιήσουμε όλα τα σήματα στο 1, δηλαδή:

$$u[n], x[n] \in \{0, \frac{1}{2^{n_0}}, \dots, 1 - \frac{1}{2^{n_0}}\}$$

$$v[n] \in \{0, \frac{1}{2^{n_0}}, \dots, 1, \dots, \frac{2}{2^{n_0-1}}\}$$

$$v[n] = u[n] + x[n]$$

$$y[n] = Q(v[n]) = \begin{cases} 1 & , v[n] \geq 1 \\ 0 & , v[n] < 1 \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} e[n-1] & , n \geq 1 \\ x[0] & , n = 0 \end{cases}$$

και θα έχουμε ότι

$$e[n] = \langle v[n] \rangle = \langle u[n] + e[n-1] \rangle \quad (3.47)$$

Η αντιστοιχία με τον MOD1 είναι ξεκάθαρη.

Από την 3.46 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} e[0] &= (u[0] + x[0]) \pmod{M} \\ e[1] &= (u[1] + e[0]) \pmod{M} \\ &\vdots \\ e[n] &= (u[n] + e[n-1]) \pmod{M} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση κάθε φορά το $e[i]$ με το $u[i] + e[i-1]$, και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα:

$$((a \pmod{M}) + b) \pmod{M} = (a + b) \pmod{M}$$

θα έχουμε ότι:

$$e[n] = (x[0] + \sum_{i=0}^n u[i]) \pmod{M} \quad (3.48)$$

Για σταθερή είσοδο $u[u] = u$ θα έχουμε ότι:

$$e[n] = (x[0] + (n+1)u) \pmod{M}, \quad \forall n \geq 0 \quad (3.49)$$

Για να υπάρχει περιοδική τροχιά μήκους L_1 θα πρέπει να ισχύει ότι: $e[n+L_1] = e[n]$, $\forall n \geq 0$. Άρα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} (x[0] + (n+L_1+1)u) \pmod{M} &= (x[0] + (n+1)u) \pmod{M} \\ \Rightarrow L_1 u \pmod{M} &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

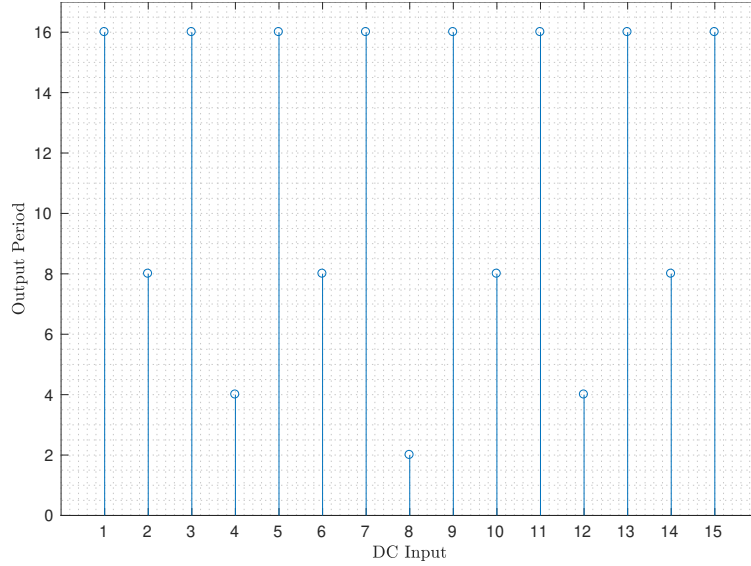
Από αυτή τη σχέση μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

1. Το μήκος L_1 της περιοδικής ακολουθίας δεν εξαρτάται από την αρχική συνθήκη $x[0]$ του συστήματος, όπως και στον MOD1.
2. Η ελάχιστη τιμή της περιόδου L_1 θα είναι

$$L_1 = \frac{M}{\gcd(u, M)} \quad (3.51)$$

3. Αν οι u, M είναι σχετικά πρώτοι, τότε η περίοδος L_1 λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της $L_1 = M$, διαφορετικά $L_1 < M$.

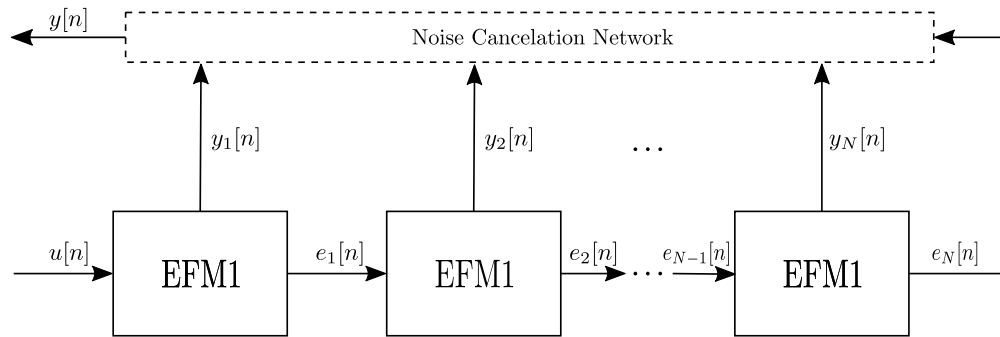
Παρακάτω παρουσιάζουμε τις κύριες περιόδους των ακολουθιών εξόδου ενός EFM1 με $M = 2^4$



Εικόνα 3.9: Περίοδοι ακολουθιών εξόδου EFM1 με $M = 2^4$ για διάφορες τιμές της εισόδου u

3.4.2 Ανάλυση MASH EFM υψηλότερης τάξης

Στην εικόνα 3.10 παρουσιάζεται η γενική μορφή ενός MASH διαμορφωτή N-οστής τάξης που κατασκευάζεται από τη σύνδεση N EFM1 εν σειρά.



Εικόνα 3.10: MASH Error-Feedback Διαμορφωτής N-οστής τάξης

Από την ανάλυση του EFM1 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 e_1[n] &= (x_1[0] + (n+1)u) \pmod{M} \\
 e_2[n] &= (x_2[0] + \sum_{i=0}^n e_1[i]) \pmod{M} \\
 &\vdots \\
 e_N[n] &= (x_N[0] + \sum_{i=0}^n e_{N-1}[i]) \pmod{M}
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας διαδοχικά τα $e_k[n]$ με την εξίσωση $e_k[n] = (x_k[0] + \sum_{i=0}^n e_{k-1}[i])$ θα έχουμε ότι:

$$e_N[n] = (x_N[0] + \sum_{i_{N-1}=0}^n x_{N-1}[0] + \sum_{i_{N-2}=0}^{i_{N-1}} x_{N-2} + \dots + \sum_{i_1=0}^{i_2} x_1[0] + (i_1 + 1)u) \mod M \quad (3.52)$$

Απλουστεύουμε την παραπάνω εξίσωση για τον 2ας τάξης MASH Error-Feedback Διαμορφωτή (N=2):

$$e_2[n] = (x_2[0] + \sum_{i=0}^n x_1[0] + (i + 1)u) \mod M = (x_2[0] + (n + 1)x_1[0] + \frac{1}{2}n(n + 1)u) \mod M \quad (3.53)$$

Για να υπάρχει περιοδική τροχιά μήκους L_2 θα πρέπει να ισχύει ότι: $e_2[n + L_2] = e_2[n]$, $\forall n \geq 0$. Σ Συνεπώς, από την εξίσωση 3.53 θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$L_2 x_1[0] + \frac{1}{2}uL_2(L_2 + 1) \mod M = 0 \quad (3.54)$$

Ταυτόχρονα όμως η L_2 πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου του πρώτου σταδίου EFM1, δηλαδή $L_2 = kL_1$, $k \in \mathbb{Z}$ Συνεπώς, το πρόβλημά μας μετασχηματίζεται στο να βρούμε το ελάχιστο k_{min} έτσι ώστε $L_2 = k_{min}$ και να ικανοποιείται η 3.54.

Λόγω της 3.51 και επειδή έχουμε θεωρήσει ότι $M = 2^{n_0}$, η περίοδος L_1 θα είναι άρτιος αριθμός. Άρα $\frac{1}{2}uL_2(L_2 + 1) \equiv \frac{1}{2}uL_2 \mod M$. Άρα η σχέση 3.54 μετατρέπεται ως:

$$(k_{min}L_1(x_1[0] - \frac{1}{2})u) \mod M = 0 \Rightarrow \quad (3.55)$$

$$(k_{min}L_1(2x_1[0] - u)) \mod 2M = 0 \Rightarrow \quad (3.56)$$

$$k_{min} = \frac{2M}{\gcd(2M, (2x_1[0] + u)L_1)} \quad (3.57)$$

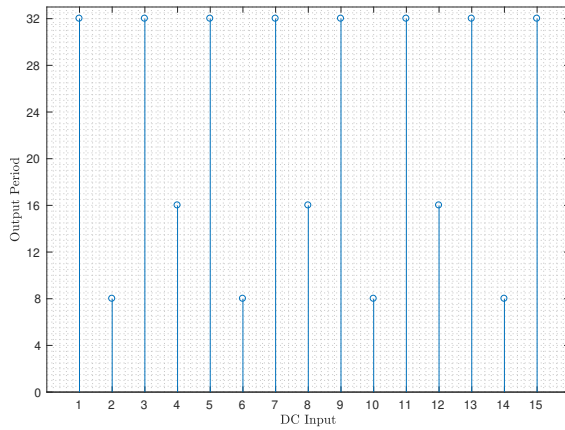
Επομένως:

$$L_2 = \frac{2M}{\gcd(2M, (2x_1[0] + u)L_1)} L_1 \quad (3.58)$$

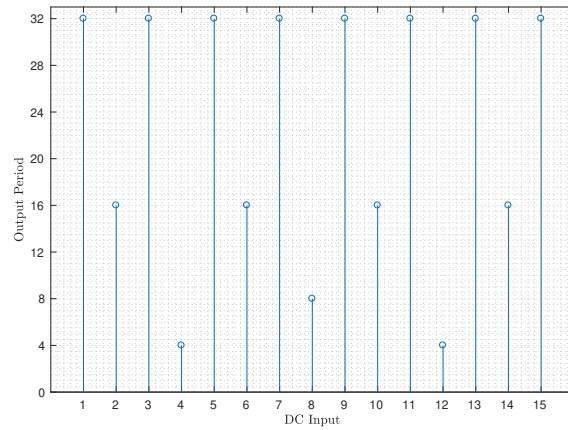
όπου το L_1 δίνεται από την 3.51

Παρατηρούμε ότι, σε αντίθεση με τον EFM1, η πρώτη αρχική κατάσταση παίζει ρόλο στον υπολογισμό της περιόδου, ενώ η δεύτερη αρχική κατάσταση $x_2[0]$ δεν έχει κάποια επίδραση, σε αντίθεση με τον απλό EFM1, όπου η αρχική συνθήκη δεν έπαιζε κάποιο ρόλο. Και πάλι παρατηρούμε κοινά σημεία μεταξύ των απλών ΣΔ Διαμορφωτών και των Error-Feedback.

Παρακάτω παραθέτουμε τα αποτελέσματα προσομοίωσης, όπου υπολογίσαμε την περίοδο L_2 για $M = 2^4$ και για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες, για διάφορες τιμές της εισόδου u :



(a) Περίοδος L_2 για $M = 2^4$, $x_1[0] = 1$



(b) Περίοδος L_2 για $M = 2^4$, $x_1[0] = 2$

Εικόνα 3.11: Περίοδοι ακολουθιών εξόδου MASH EFM1 2ης τάξης

Η ανάλυση για τον Error-Feedback 2^{ης} τάξης (EFM2) είναι πανομοιότυπη με αυτή που προηγήθηκε [27]. Υπάρχουν αναλυτικά αποτελέσματα και για διαμορφωτές υψηλότερης τάξης, μέχρι και 5^{ης} [28].

4. Τεχνικές σύνθεσης συχνότητας με χρήση $\Sigma\Delta$ Διαμορφωτών

4.1 Εισαγωγή

Το περιορισμένο φάσμα συχνοτήτων που είναι διαθέσιμο στις ασύρματες επικοινωνίες κάνει επιτακτικό τον ακριβή ορισμό των φερουσών συχνοτήτων, τόσο στο σύστημα του πομπού όσο και στο σύστημα του δέκτη. Οι συνθετητές συχνότητας (frequency synthesizers) μπορούν να παραγάγουν περιοδικά σήματα με ακριβώς ορισμένη συχνότητα, παίζοντας σημαντικό ρόλο στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα.

Η σύνθεση συχνότητας εξακολουθεί να αποτελεί πρόκληση, κυρίως γιατί οι αλγεβρικές πράξεις με συχνότητες είναι πιο δύσκολες από ότι οι πράξεις με άλλες ποσότητες, όπως τάσεις ή ρεύματα. Με το πέρασμα των χρόνων, έχουν υιοθετηθεί αρκετοί τρόποι για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα.

Πλέον, 3 είναι οι κύριοι τρόποι που παράγεται μια επιθυμητή συχνότητα από μια συχνότητα αναφοράς:

1. LUTs συνθετητές
2. Άμεσοι (direct) συνθετητές
3. Συνθετητές με βρόχο κλειδωμένης φάσης (phase-locked loop, PLL)

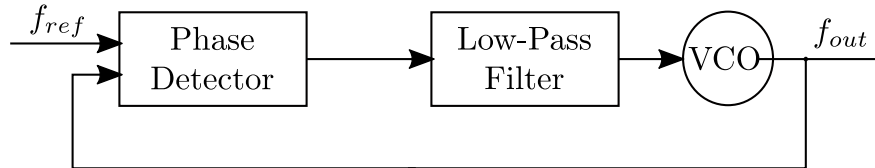
Η 1^η μέθοδος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αν θέλουμε να συνθέσουμε μεγάλες συχνότητες, ενώ η 2^η καταλαμβάνει πολύ μεγάλη επιφάνεια υλικού. Επομένως, η μέθοδος με PLL είναι αυτή που κυριαρχεί στη σύνθεση συχνότητας.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε τα βασικά θεωρητικά στοιχεία για τον PLL, θα παρουσιάσουμε τα δύο είδη σύνθεσης συχνότητας Integer-N και Fractional-N, θα δούμε πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι $\Sigma\Delta$ Διαμορφωτές σε Fractional-N συνθετητές συχνότητας και θα μελετήσουμε τεχνικές με τις οποίες μπορούμε να βελτιώσουμε την απόδοση των $\Sigma\Delta$ Διαμορφωτών ως τμήματα ενός Fractional-N PLL συνθετητή συχνότητας.

4.2 Βασικά στοιχεία θεωρίας για PLL και frequency synthesizers με PLL

4.2.1 Βρόχος κλειδωμένης φάσης PLL

Ένας βρόχος κλειδωμένης φάσης (εικόνα 4.1) είναι ένα σύστημα ανάδρασης, που η αρχή λειτουργίας του είναι να προσαρμόζει τη φάση του σήματος εξόδου $y(t)$ ώστε να είναι ίση με αυτή του σήματος εισόδου $x(t)$.



Εικόνα 4.1: Βρόχος κλειδωμένης φάσης (PLL)

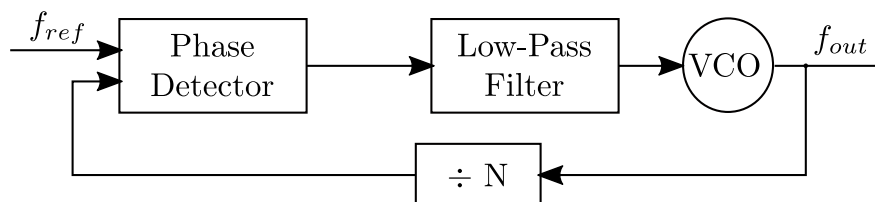
Ένας PLL αποτελείται από έναν ανιχνευτή φάσης (phase detector, PD), ένα βαθυπερατό φίλτρο (LPF) και από έναν ταλαντωτή ελεγχόμενο από τάση (voltage-controlled oscillator VCO). Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου ενισχύεται και τροφοδοτείται μέσω ανάδρασης στην είσοδο, με σκοπό να μηδενιστεί.

Ο βρόχος θεωρείται κλειδωμένος (locked) όταν η διαφορά φάσης είναι σταθερή. Τότε ο PLL λειτουργεί ως εξής: ο PD υπολογίζει τη διαφορά φάσης μεταξύ του σήματος εισόδου και του σήματος εξόδου και δίνει έξοδο που είναι συνάρτηση (ιδανικά αναλογική) αυτής της διαφοράς. Το βαθυπερατό φίλτρο διώχνει τα υψίσυχνα στοιχεία από την έξοδο του PD. Η έξοδος του φίλτρου τροφοδοτείται στον VCO ώστε να παραχθεί η επιθυμητή συχνότητα εξόδου. Ο VCO ταλαντώνεται με συχνότητα ίση με τη συχνότητα εισόδου, αλλά με μια σταθερή διαφορά φάσης.

Υπάρχουν δύο βασικοί συνθετητές συχνότητας που βασίζονται σε PLL: αυτός που κάνει ακέραια (integer-N) και αυτός που κάνει κλασματική (fractional-N) σύνθεση συχνότητας. Οι δύο υλοποιήσεις διαφέρουν ως προς την υλοποίηση και τον έλεγχο του διαιρέτη.

4.2.2 Ακέραια σύνθεση συχνότητας

Στην εικόνα 4.2 ο PLL εκτελεί πολλαπλασιασμό συχνότητας, ώστε η παραγόμενη συχνότητα εξόδου f_{out} να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της συχνότητας αναφοράς f_{ref} .



Εικόνα 4.2: Ακέραια σύνθεση συχνότητας βασισμένη σε PLL

Σε κατάσταση κλειδώματος ισχύει ότι:

$$f_{out} = f_{ref} \cdot N$$

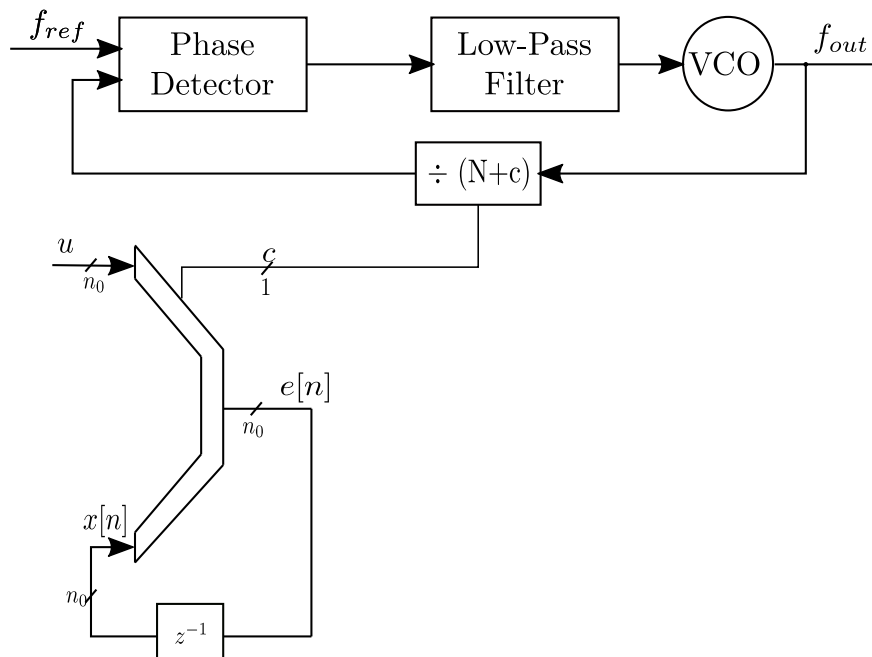
Αν και αρκετά απλός, αυτός ο συνθετητής εμφανίζει αρκετά μειονεκτήματα. Παρατηρούμε ότι η ακρίβεια στη συχνότητα ισούται με τη συχνότητα αναφοράς. Επομένως, αν απαιτείται fine-tuning, η μοναδική επιλογή είναι να μειωθεί η συχνότητα αναφοράς. Επιπλέον, για να είναι ευσταθής ο βρόχος πρέπει το εύρος ζώνης να είναι περίπου το ένα δέκατο της συχνότητας αναφοράς. Συνεπώς, μείωση της συχνότητας εισόδου οδηγεί σε μείωση του εύρους ζώνης.

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να έχουμε υψηλή συχνοτική ευκρίνεια, χωρίς να χαλάμε τη δυναμική συμπεριφορά του βρόχου είναι να επιτελούμε κλασματική διαίρεση αντί για ακέραια.

4.2.3 Κλασματική σύνθεση συχνότητας

Στην κλασματική σύνθεση συχνότητας μπορούν να συνθεθούν κλασματικά πολλαπλάσια της συχνότητας αναφοράς, επιτρέποντας έτσι μεγαλύτερη συχνοτική ευκρίνεια για δεδομένη συχνότητα αναφοράς.

Η βασική ιδέα της κλασματικής σύνθεσης συχνότητας είναι η διαίρεση με κλάσματα αντί για ακεραίους. Για να επιτευχθεί αυτή η κλασματική διαίρεση, ο διαιρέτης ελέγχεται διαφορετικά από ότι στην περίπτωση της ακέραιας σύνθεσης. Στην εικόνα 4.3 παρουσιάζεται ένας PLL fractional-N συνθετητής συχνότητας, όπου ο διαιρέτης ελέγχεται από το κρατούμενο εξόδου ενός n_0 -bit ψηφιακού συσσωρευτή.



Εικόνα 4.3: Κλασματική σύνθεση συχνότητας βασισμένη σε PLL. Ο διαιρέτης ελέγχεται από το κρατούμενο εξόδου ενός ψηφιακού συσσωρευτή.

Για να επιτευχθεί η κλασματική διαίρεση με λόγο $N = N_0 + \beta$, με $\beta \in \{0, \frac{1}{2^{n_0}}, \dots, \frac{2^{n_0}-1}{2^{n_0}}\}$, επιβάλλεται η είσοδος $u = \beta 2^{n_0}$ στον συσσωρευτή. Στην ακολουθία του κρατούμενου εξόδου παράγονται u άσσοι και $2^{n_0} - 1$ Όταν το κρατούμενο εξόδου είναι 1, η τιμή του διαιρέτη είναι $N_0 + 1$, ενώ όταν το κρατούμενο είναι 0, η τιμή του διαιρέτη είναι N_0 . Αυτό σημαίνει ότι ο διαιρέτης συχνότητας διαιρεί $2^{n_0} - u$ φορές με N_0 και u φορές με $N_0 + 1$. Επομένως, κατά μέση τιμή σε μήκος 2^{n_0} διαιρεί με:

$$N_{mean} = \frac{(2^{n_0} - u)N_0 + u(N_0 + 1)}{2^{n_0}} = N_0 + \frac{u}{2^{n_0}} = N_0 + \beta \quad (4.1)$$

Συνεπώς:

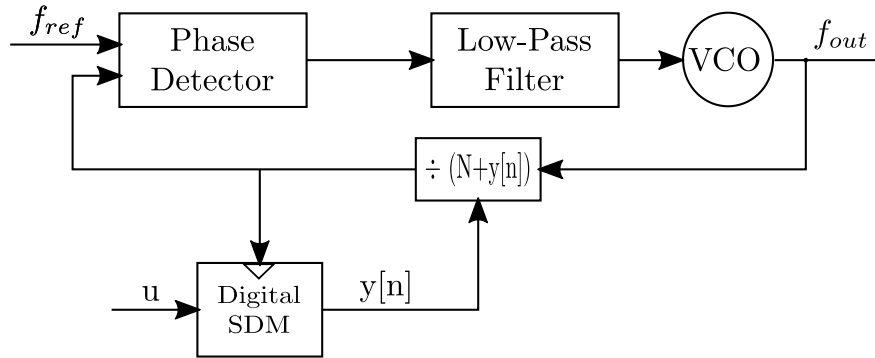
$$f_{out} = (N_0 + \beta)f_{ref} \quad (4.2)$$

και η συχνοτική ευκρίνεια είναι:

$$\Delta f = \frac{1}{2^{n_0}} f_{ref} \quad (4.3)$$

Από την τελευταία εξίσωση φαίνεται ότι μπορούμε να αυξήσουμε τη συχνοτική ευκρίνεια, αρκεί να θεωρήσουμε αρκετά μεγάλο n_0 .

Ο ψηφιακός συσσωρευτής μπορεί να αντικατασταθεί από έναν ψηφιακό ΣΔ διαμορφωτή.



Εικόνα 4.4: Κλασματική σύνθεση συχνότητας βασισμένη σε PLL. Ο διαιρέτης ελέγχεται από την ακολουθία εξόδου ενός ΣΔ Διαμορφωτή.

Η ακολουθία εξόδου του ΣΔ Διαμορφωτή ελέγχει τον διαιρέτη, ώστε να επιτευχθεί η κλασματική διαίρεση. Η είσοδος του διαμορφωτή u είναι σταθερή, και ο διαμορφωτής χρονίζεται από την έξοδο του διαιρέτη. Ο διαιρέτης συχνότητας διαιρεί την συχνότητα εξόδου f_{out} με $N + y[n]$, όπου N ένας συγκεκριμένος ακέραιος και $y[n]$ η έξοδος του διαμορφωτή. Επειδή η μέση τιμή της εξόδου $y[n]$ είναι ανάλογη της εισόδου u , η επιθυμητή διαίρεση συχνότητας επιτυγχάνεται κατά μέση τιμή.

Η διαφορά μεταξύ του πραγματικού λόγου διαίρεσης (N_0 ή $N_0 + 1$) και του επιθυμητού $N_0 + \beta$ αναπαριστά το σφάλμα φάσης. Αν το σφάλμα είναι περιοδικό, ειδικά με μικρή περίοδο προκύπτει τονικό φάσμα. Όσοι τόνοι βρίσκονται έξω από το εύρος ζώνης του PLL εξαλείφονται από το βαθυπερατό φίλτρο. Όμως, όσοι βρίσκονται εντός του εύρους ζώνης περνάνε από το βαθυπερατό φίλτρο και διαμορφώνουν τη συχνότητα του VCO, και εμφανίζονται ως σφαιρικοί

τόνοι (spurious tones, spurs). Αυτοί οι τόνοι ονομάζονται και κλασματικοί (fractional) επειδή εμφανίζονται σε κλασματικά πολλαπλάσια της συχνότητας αναφοράς.

Λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι να εφαρμόσουμε ορισμένες τεχνικές, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμε την περίοδο της ακολουθίας εξόδου $y[n]$, να "σπάσουμε" δηλαδή την περιοδικότητα. Αυτές οι τεχνικές χωρίζονται σε 2 κατηγορίες:

1. Μη-ντετερμινιστικές-Στοχαστικές: Εισαγωγή τυχαίας (ή ψευδοτυχαίας) ακολουθίας στην είσοδο
2. Ντετερμινιστικές:
 - Υψηλότερης τάξης διαμορφωτές που τυχαιοποιούν το σφάλμα και σπάνε την περιοδικότητα
 - Επιλογή αρχικών συνθηκών
 - Τροποποιημένες τοπολογίες διαμορφωτών

Στις ενότητες που ακολουθούν, θα αναλύσουμε αυτές τις τεχνικές.

4.3 Σφάλμα κβαντισμού

Πριν προβούμε στο να αναλύσουμε τις τεχνικές εξάλειψης των spurs σε ΣΔ Διαμορφωτές, οφείλουμε να εξάγουμε τις εξισώσεις για το σφάλμα κβαντισμού τόσο στον MOD1 όσο και σε υψηλότερης τάξης MASH διαμορφωτές.

- MOD1: Από την Πρόταση 2, θα έχουμε ότι $F^n(y) = \langle y + n\beta \rangle = y[n] \Rightarrow$

$$x[n] = 2 \left\langle \frac{x[0] - u + 1}{2} + n\beta \right\rangle + u - 1 \quad (4.4)$$

Επομένως, για το σφάλμα κβαντισμού θα ισχύει ότι: $e[n] = \text{sgn}(x[n]) - x[n] = u - x[n + 1] = u - 2 \left\langle \frac{x[0] - u + 1}{2} + (n + 1)\beta \right\rangle - u + 1 = 1 - 2 \left\langle \frac{x[0]}{2} + 1 - \beta + (n + 1)\beta \right\rangle = 1 - 2 \left\langle \frac{x[0]}{2} + n\beta + 1 \right\rangle \Rightarrow$

$$e[n] = 1 - 2 \left\langle \frac{x[0]}{2} + n\beta \right\rangle \quad (4.5)$$

Αν ορίσουμε το κανονικοποιημένο σφάλμα κβαντισμού ως $\epsilon[n] = \frac{e[n]}{2}$ τότε θα ισχύει ότι:

$$\epsilon[n] = \frac{1}{2} - \left\langle \frac{x[0]}{2} + n\beta \right\rangle \quad (4.6)$$

- MASH: Η ανάλυση που κάναμε για τον MOD1 με dc είσοδο στο κεφάλαιο 2 μπορεί να γενικευτεί άμεσα και για μη σταθερή είσοδο $u[n]$. Με παρόμοια βήματα με αυτά που ακολουθήσαμε στην ανάλυση του MOD1 με σταθερή είσοδο, μπορεί ναδειχθεί ότι [29]:

$$x[n] = 2 \left\langle \frac{x[0]}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{u[k]}{2} \right) \right\rangle + u[n - 1] + 1 \quad (4.7)$$

Αυτή η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί η εξίσωση του σφάλματος χβαντισμού κάθε σταδίου ενός MASH Διαμορφωτή, που κάθε στάδιο του είναι ένας MOD1. Συγκεκριμένα, το σφάλμα χβαντισμού για το i -οστό στάδιο ενός N -τάξης MASH διαμορφωτή θα ισούται με:

$$e_i[n] = \begin{cases} 1 - 2 < \frac{x_1[0]}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2} + \frac{u[k]}{2}) > & , i = 1 \\ & , \\ 1 - 2 < \frac{x_i[0]}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2} + \frac{e_{i-1}[k]}{2}) > & , i = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (4.8)$$

Άρα, για το κανονικοποιημένο σφάλμα χβαντισμού κάθε σταδίου θα ισχύει ότι:

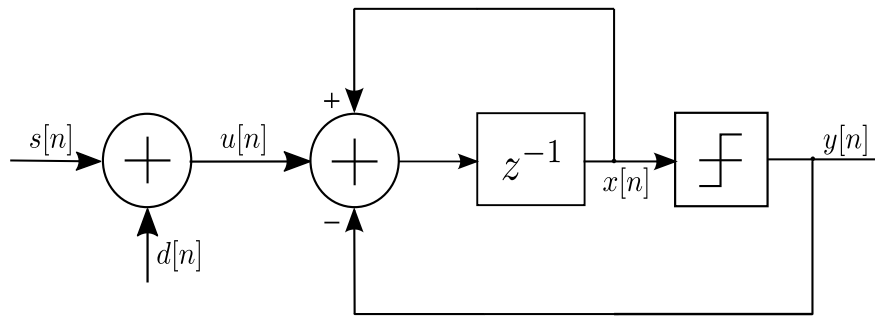
$$\epsilon_i[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} - < \frac{x_1[0]}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2} + \frac{u[k]}{2}) > & , i = 1 \\ & , \\ \frac{1}{2} - < \frac{x_i[0]}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2} + \epsilon_{i-1}[k]) > & , i = 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (4.9)$$

Από την τελευταία σχέση, μπορεί να δειχθεί επαγωγικά ότι [30, 31]:

$$\epsilon_N[n] = \frac{1}{2} - < \frac{x_N[0]}{2} + \sum_{k_1=0}^{n-1} \frac{x_{N-1}[0]}{2} + \dots + \sum_{k_{N-1}=0}^{k_{N-2}-1} \frac{x_1[0]}{2} + \sum_{k_N=0}^{k_{N-1}-1} \frac{1}{2} + \frac{u[k_N]}{2} > \quad (4.10)$$

4.4 Στοχαστικές Τεχνικές - Dithering

Με τον όρο dithering ονομάζουμε την εισαγωγή μιας τυχαίας ακολουθίας στην είσοδο του διαμορφωτή, με στόχο να βελτιώσουμε τη φασματική απόδοσή του [21]. Ιδανικά, το dithering βελτιώνει τις στατιστικές ιδιότητες του θορύβου χβαντισμού, με στόχο αυτός να προσεγγίζει τον λευκό θόρυβο. Αν το σφάλμα του χβαντιστή είναι λευκό, τότε η ακολουθία εξόδου δεν θα περιέχει spurs.



Εικόνα 4.5: 1^{ης} τάξης ΣΔ Διαμορφωτής με dithering

Στην εικόνα 4.5 παρουσιάζεται ένας ΣΔ Διαμορφωτής όπου εφαρμόζεται η τεχνική του dithering. Η είσοδος στον διαμορφωτή είναι πλέον η

$$u[n] = s[n] + d[n] \quad (4.11)$$

όπου $s[n]$ το σήμα εισόδου και $d[n]$ η ακολουθία dithering, η οποία είναι i.i.d και ανεξάρτητη από το $s[n]$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η ακολουθία $d[n]$ είναι τέτοια ώστε

$$s[n] + d[n] \in [-1, 1], \quad \forall n \geq 0 \quad (4.12)$$

Προτού παρουσιάσουμε τα 2 βασικά αποτελέσματα για το dithering στην περίπτωση της σταθερής εισόδου, οφείλουμε να δώσουμε τον ορισμό για τις περίπου στάσιμες (quasi-stationary) στοχαστικές διαδικασίες:

Ορισμός 4. Η στοχαστική διαδικασία $x[n]$ είναι quasi-stationary αν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε:

1. $\mathcal{E}(x[n]) = m_e(n)$ με $|m_e(n)| \leq C \quad \forall n$
2. Το $\bar{\mathcal{E}}(x[n]) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{E}(x[n])$ υπάρχει.
3. $|R_x(n, k)| \leq C, \quad \forall n, k$, όπου $R_x(n, k) = \mathcal{E}(x[n]x[k])$
4. Η αυτοσυσχέτιση $R_x(k) = \mathcal{E}(x[n]x[n+k])$ υπάρχει $\forall k$.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα 2 βασικά αποτελέσματα για το dithering στην περίπτωση σταθερής εισόδου [32]:

Θεώρημα 1. Για έναν MOD1, υποθέτουμε ότι $s[n] = s, \quad \forall n \geq 0$ και dithering σήμα $d[n]$ i.i.d., ανεξάρτητο από το s . Υποθέτουμε ότι το $d[n]$ έχει μια κατανομή με κάποια σ.μ.π. και $s[n] + d[n] \in [-1, 1], \quad \forall n \geq 0$. Τότε, το κανικοποιημένο σφάλμα κβαντισμού $\epsilon[n]$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Το $\epsilon[n]$ είναι quasi-stationary διαδικασία και η αυτοσυσχέτισή του θα δίνεται από τη σχέση:

$$R_\epsilon(k) = \begin{cases} \frac{1}{12} & , k = 0 \\ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l^2} \Phi_y^{|k|}(2\pi l) & , k \neq 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

όπου η Φ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του $y[n] = \frac{1+u[n]}{2} = \frac{1+s+d[n]}{2}$, δηλαδή $\Phi_y(t) = \mathcal{E}(e^{jty})$.

Γνωρίζοντας την αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού, μπορούμε να βρούμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος αυτού. Η φασματική πυκνότητα ισχύος ορίζεται ως: $S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R(n)e^{-j2\pi fn}$. Επομένως, η φασματική πυκνότητα ισχύος για το κανονικοποιημένο σφάλμα κβαντισμού θα είναι:

$$S_\epsilon(f) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \neq 0} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l^2} \Phi_y^{|k|}(2\pi l) e^{-j2\pi fn} \quad (4.14)$$

Παρατηρούμε τα εξής:

1. Το φάσμα ισχύος του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού αποτελείται από 2 μέρη: το ένα μέρος ($\frac{1}{12}$) αντιστοιχεί στον λευκό θόρυβο και το δεύτερο ($\sum_{l \neq 0} \frac{1}{l^2} \Phi_y^{|k|}(2\pi l) e^{-j2\pi f n}$) είναι συνεχής συνάρτηση της συχνότητας και υπερτίθεται στον λευκό θόρυβο.
2. Το φάσμα εξαρτάται από τη σταθερή είσοδο s , αν και έχουμε εφαρμόσει dithering. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι το φάσμα εξαρτάται από τη χαρακτηριστική συνάρτηση του $y[n]$, το οποίο με τη σειρά του εξαρτάται από την είσοδο s .
3. Για να ήταν το κανονικοποιημένο σφάλμα κβαντισμού λευκός θόρυβος θα έπρεπε να ισχύει ότι:

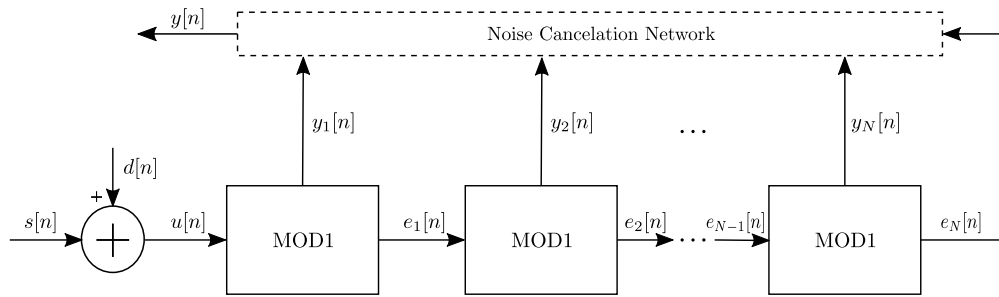
$$\sum_{l \neq 0} \frac{1}{l^2} \Phi_y^{|k|}(2\pi l) = 0, \quad \forall k \neq 0$$

Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $\Phi_y^{|k|}(2\pi l) = 0, \forall l, k \neq 0$, που σημαίνει ότι $y[n] \sim U[0, 1] \Rightarrow s + d[n] \sim U[-1, 1]$. Τότε, το επιτρεπτό εύρος για την dc είσοδο s γίνεται 0. Επομένως, το dithering δεν μπορεί να δώσει λευκό θόρυβο κβαντισμού στον MOD1 με σταθερή είσοδο.

Ο στόχος του dithering για λευκό σφάλμα κβαντισμού επιτυγχάνεται σε MASH διαμορφωτές με $N \geq 2$ στάδια MOD1. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2. Θεωρούμε έναν MASH διαμορφωτή με N στάδια MOD1 με είσοδο $u[n] = s + d[n]$. Το σήμα dithering $d[n]$ είναι *i.i.d.* με κάποια σ.μ.π. και είναι τέτοιο ώστε να μην γίνεται υπεροδήγηση των κβαντιστών. Αν για τα στάδια N ισχύει ότι $N \geq 2$, τότε το κανονικοποιημένο σφάλμα κβαντισμού του τελευταίου σταδίου $\epsilon_N[n]$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Το $\epsilon_N[n]$ είναι *quasi-stationary* διαδικασία και η αυτοσυσχέτιση του δίνεται από τη σχέση:

$$R_\epsilon(k) = \begin{cases} \frac{1}{12} & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases} \quad (4.15)$$



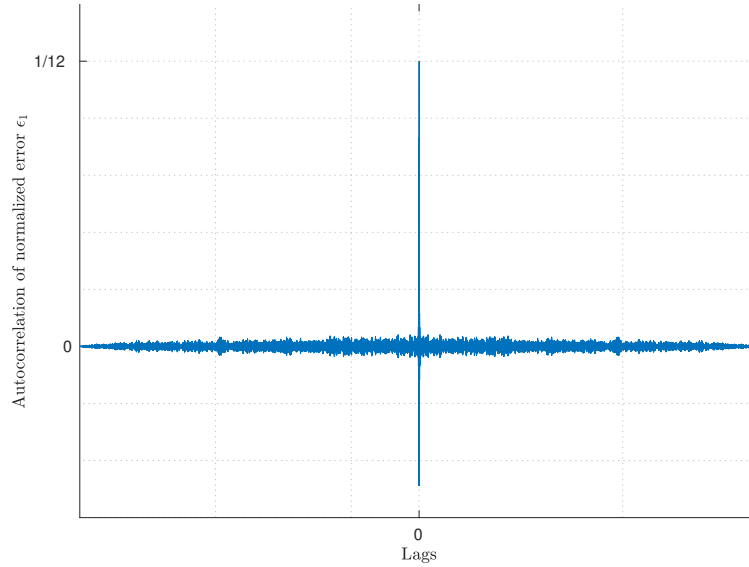
Εικόνα 4.6: MASH διαμορφωτής N σταδίων MOD1 με dithering

Επομένως, η φασματική πυκνότητα ισχύος του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού του τελευταίου σταδίου θα είναι:

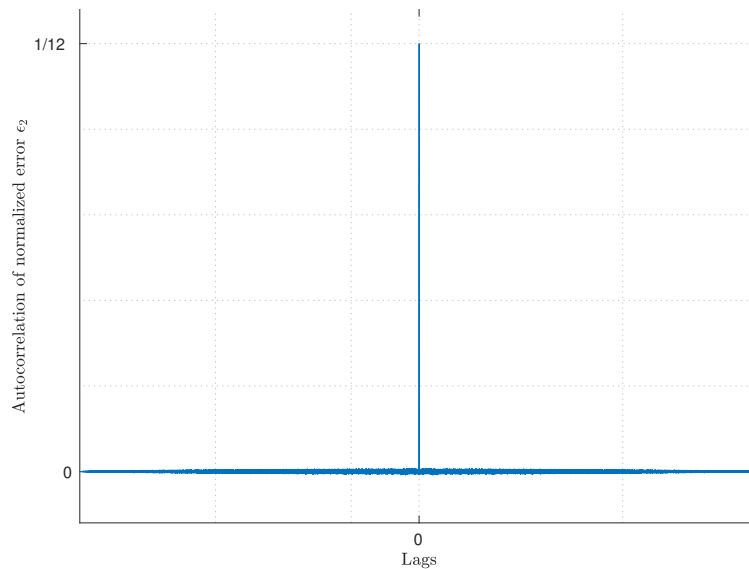
$$S_{\epsilon_N}(f) = \frac{1}{12} \quad (4.16)$$

δηλαδή θα είναι λευκός θόρυβος.

Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζουμε τα γραφήματα των αυτοσυσχετίσεων των κανονικοποιημένων σφαλμάτων ϵ_1 και ϵ_2 σε έναν MASH διαμορφωτή 2^{ns} τάξης, όπου έχουμε εφαρμόσει dithering $\sim U[-0.05, 0.05]$ με σταθερή είσοδο $s = 0.12$.

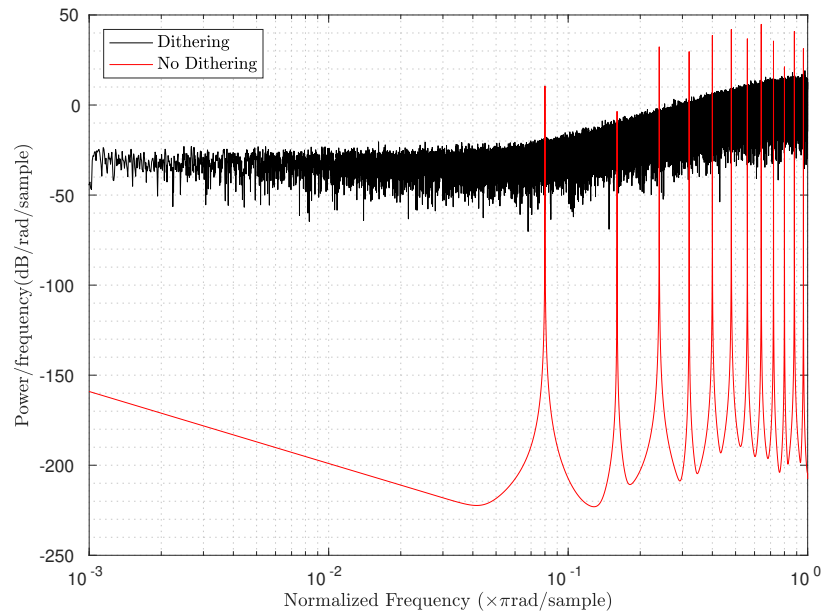


Εικόνα 4.7: Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού ϵ_1 σε έναν 2^{ns} τάξης MASH διαμορφωτή με dithering



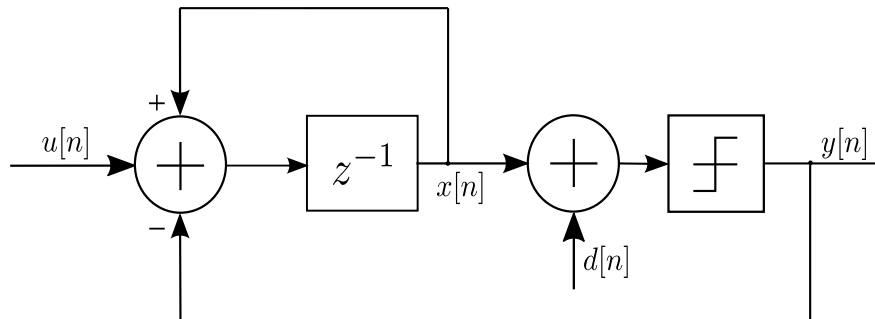
Εικόνα 4.8: Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού ϵ_2 σε έναν 2^{ns} τάξης MASH διαμορφωτή με dithering

Στην εικόνα 4.9 παρουσιάζεται το φάσμα εξόδου ενός 2^{ας} τάξης MASH διαμορφωτή με και χωρίς dithering. Παρατηρούμε την εξάλειψη των spurs με την εφαρμογή του dithering.



Εικόνα 4.9: Φάσμα εξόδου ενός 2^{ας} τάξης MASH διαμορφωτή με και χωρίς dithering.

Η ακολουθία dithering μπορεί να εφαρμοστεί και στο σήμα εισόδου του κβαντιστή, αντί στην είσοδο του διαμορφωτή. Τότε θα έχουμε in-loop dithering [33]. Ισχύουν παρόμοια αποτελέσματα με προηγουμένως, με τη διαφορά ότι στην περίπτωση του in-loop dithering χρειάζονται τουλάχιστον 3 στάδια στον MASH διαμορφωτή έτσι ώστε να επιτευχθεί λευκός θόρυβος κβαντισμού στο τελευταίο στάδιο.



Εικόνα 4.10: In-loop dithering

Για λόγους πληρότητας, αναφέρουμε ότι υπάρχουν και άλλες μέθοδοι dithering, όπως το LSB dithering σε ψηφιακούς ΣΔ Διαμορφωτές [34, 35].

4.5 Ντετερμινιστικές Τεχνικές - Επίδραση της εισόδου και των αρχικών συνθηκών στον θόρυβο κβαντισμού

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3, τόσο η είσοδος όσο και οι αρχικές συνθήκες παίζουν σημαντικό ρόλο στην ύπαρξη ή μη περιοδικών τροχιών στους ΣΔ Διαμορφωτές. Συγκεκριμένα, η άρρητη είσοδος εξασφαλίζει την μη ύπαρξη περιοδικών τροχιών, ενώ, σε διαμορφωτές υψηλότερη τάξης, οι άρρητες αρχικές συνθήκες εξασφαλίζουν την μη ύπαρξη περιοδικών τροχιών, με δεδομένη ρητή σταθερή είσοδο. Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν και για MASH διαμορφωτές, αφού κάθε στάδιο είναι ένας MOD1. Σε αυτή την παράγραφο θα ερευνήσουμε την επίδραση της εισόδου και των αρχικών συνθηκών στον θόρυβο κβαντισμού.

Δίνουμε τους εξής ορισμούς:

Ορισμός 5. Για μια χρονική ακολουθία $\{x[n], n = 0, 1, \dots, \}$ ορίζουμε το μέσο όρο ως :

$$\mathcal{E}(x[n]) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} x[i]$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Αν η ακολουθία $x[n]$ είναι περιοδική με περίοδο L , τότε το παραπάνω εκφυλίζεται σε ένα πεπερασμένο άθροισμα ως

$$\mathcal{E}(x[n]) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} x[i]$$

Η αυτοσυσχέτιση της ακολουθίας ορίζεται ως:

$$R_x(k) = \mathcal{E}(x[n]x[n+k])$$

Επιπλέον, θα χρειαστούμε δύο πολύ βασικά θεωρήματα:

Θεώρημα 3 (Weyl). Έστω $c[n] = a_0 + a_1 n + \dots + a_k n^k$ ένα πολυώνυμο k -όστου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Αν τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές a_1, \dots, a_k είναι άρρητος, τότε, για κάθε Riemann-ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} f(\langle c[n] \rangle) = \int_0^1 f(r) dr \quad (4.17)$$

Θεώρημα 4 ([36]). Έστω ότι το κλάσμα $\frac{M}{N}$ είναι ανάγωγο. Τότε θα ισχύει ότι:

$$\left\{ \left\langle \frac{kM}{N} \right\rangle, k = 0, 1, \dots, N-1 \right\} = \left\{ \left\langle \frac{k}{N} \right\rangle, k = 0, 1, \dots, N-1 \right\} \quad (4.18)$$

Θα δούμε πρώτα πώς επηρεάζει η είσοδος u το κανονικοποιημένο σφάλμα κβαντισμού. Θα θεωρήσουμε ότι όλες οι αρχικές συνθήκες είναι 0. Ξεκινάμε από τον MOD1. Χάριν ευκολίας, ορίζουμε

$$\zeta[n] = \frac{1}{2} - \epsilon[n] \quad (4.19)$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

- $\beta = \frac{K}{L} \in \mathbb{Q}$. Τότε η ακολουθία $\epsilon[n]$ θα είναι περιοδική με περίοδο L και θα ισχύει ότι:

$$\mathcal{E}(\zeta[n]) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \langle n \frac{K}{L} \rangle = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \frac{n}{L} = \frac{L-1}{2L} \quad (4.20)$$

$$\mathcal{E}(\zeta^2[n]) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \langle n \frac{K}{L} \rangle^2 = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \left(\frac{n}{L}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2L} + \frac{1}{6L^2} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} R_\zeta(k) &= \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \langle n\beta \rangle \langle (n+k)\beta \rangle = \\ &= \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \langle n\beta \rangle^2 + \langle k\beta \rangle \langle n\beta \rangle - \mathbb{1}_{[1-\langle k\beta \rangle, 1)}(\langle n\beta \rangle) = \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(\zeta^2[n]) + \langle k\beta \rangle \mathcal{E}(\zeta[n]) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \mathbb{1}_{[1-\langle k\beta \rangle, 1)}\left(\frac{n}{L}\right) = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2L} + \frac{1}{6L^2} - \frac{\langle k\beta \rangle (1 - \langle k\beta \rangle)}{2} \end{aligned}$$

Συνεπώς, για το κανονικοποιημένο σφάλμα κβαντισμού θα ισχύει ότι:

$$\mathcal{E}(\epsilon[n]) = \frac{1}{2} - \mathcal{E}(\zeta[n]) = \frac{1}{2L} \quad (4.23)$$

$$\mathcal{E}(\epsilon^2[n]) = \frac{1}{4} - \mathcal{E}(\zeta[n]) + \mathcal{E}(\zeta^2[n]) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6L^2} \quad (4.24)$$

$$R_\epsilon(k) = \frac{1}{4} - \mathcal{E}(\zeta[n]) + R_\zeta(k) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6L^2} - \frac{1}{2} \langle k\beta \rangle (1 - \langle k\beta \rangle) \quad (4.25)$$

- $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Τότε, θα ισχύει ότι:

$$\mathcal{E}(\zeta[n]) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \langle n\beta \rangle = \int_0^1 r dr = \frac{1}{2} \quad (4.26)$$

$$\mathcal{E}(\zeta^2[n]) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \langle n\beta \rangle^2 = \int_0^1 r^2 dr = \frac{1}{3} \quad (4.27)$$

$$R_\zeta(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{n-1} \langle n\beta \rangle \langle (n+k)\beta \rangle =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \langle n\beta \rangle^2 + \langle k\beta \rangle \langle n\beta \rangle - \mathbb{1}_{[1-\langle k\beta \rangle, 1)}(\langle n\beta \rangle) =$$

$$(4.28)$$

$$\mathcal{E}(\zeta^2[n]) + \langle k\beta \rangle \mathcal{E}(\zeta[n]) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \mathbb{1}_{[1-\langle k\beta \rangle, 1)}(\langle n\beta \rangle) =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{\langle k\beta \rangle}{2} - \int_{1-\langle k\beta \rangle}^1 r dr = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \langle k\beta \rangle (1 - \langle k\beta \rangle)$$

Συνεπώς, για το κανονικοποιημένο σφάλμα κβαντισμού θα ισχύει ότι:

$$\mathcal{E}(\epsilon[n]) = \frac{1}{2} - \mathcal{E}(\zeta[n]) = 0 \quad (4.29)$$

$$\mathcal{E}(\epsilon^2[n]) = \frac{1}{4} - \mathcal{E}(\zeta[n]) + \mathcal{E}(\zeta^2[n]) = \frac{1}{12} \quad (4.30)$$

$$R_\epsilon(k) = \frac{1}{4} - \mathcal{E}(\zeta[n]) + R_\zeta(k) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \langle k\beta \rangle (1 - \langle k\beta \rangle) \quad (4.31)$$

Στον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιήσαμε την απλή παρατήρηση ότι:

$$\langle a+b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle - \mathbb{1}_{[1-\langle b \rangle, 1)}(\langle a \rangle) = \begin{cases} \langle a \rangle + \langle b \rangle & , \langle a \rangle + \langle b \rangle < 1 \\ \langle a \rangle + \langle b \rangle - 1 & , \langle a \rangle + \langle b \rangle \geq 1 \end{cases} \quad (4.32)$$

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα για την περίπτωση όπου $\beta \in \mathbb{Q}$ συγκλίνουν σε αυτά της περίπτωσης $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ καθώς $L \rightarrow \infty$, δηλαδή καθώς το β τείνει να γίνει άρρητος. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι, ακόμα και για άρρητο β που συνεπάγεται την μη ύπαρξη περιοδικών τροχιών, η αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος εξόδου δεν είναι σταθερή, οδηγώντας έτσι σε μη λευκό θόρυβο. Μάλιστα, για άρρητο β , η αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος εξόδου δεν είναι περιοδική συνάρτηση του k , με αποτέλεσμα η φασματική ανάλυση να μην μπορεί να γίνει με κλασσικές μεθόδους ανάλυσης Fourier. Η φασματική ανάλυση επιτυγχάνεται με τη χρήση της ανάλυσης Bohr-Fourier [37], μια γενίκευση της ανάλυσης Fourier για quasi-periodic συναρτήσεις.

Η επίτευξη του στόχου για λευκό θόρυβο κβαντισμού επιτυγχάνεται για MASH διαμορφωτές τάξης $N \geq 2$ [30]. Ορίζουμε $\mathcal{I}_k(n)$ και $\mathcal{R}_k(n)$ τη γενική μορφή των πολυωνύμων k -οστού βαθμού με άρρητους και ρητούς συντελεστές αντίστοιχα.

Πρόταση 4. $\sum_{k_1=0}^{n-1} \cdots + \sum_{k_{N-1}}^{k_{N-2}-1} \sum_{k_N=0}^{k_{N-1}-1} 1 = \mathcal{R}_N(n)$

Επομένως, για το κανονικοποιημένο σφάλμα κβαντισμού θα ισχύει ότι:

$$\epsilon_N[n] = \frac{1}{2} - \langle \beta \mathcal{R}_N(n) \rangle = \frac{1}{2} - \langle \mathcal{I}_N(n) \rangle \quad (4.33)$$

Συνεπώς, οι ροπές 1^{ns} και 2^{ns} τάξης είναι:

$$\mathcal{E}(\epsilon_N[n]) = 0 \quad (4.34)$$

$$\mathcal{E}(\epsilon_N^2[n]) = \frac{1}{12} \quad (4.35)$$

Για τον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης κάνουμε χρήση της μεθοδολογίας της χαρακτηριστικής συνάρτησης [38]. Συγκεκριμένα, αναπτύσσουμε την περιοδική συνάρτηση $g(x) = \langle x \rangle$ κατά σειρά Fourier ως :

$$g(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i e^{j2\pi i x} \quad (4.36)$$

με τους συντελεστές Fourier να υπολογίζονται ως:

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = 0 \\ \frac{j}{2\pi i}, & i \neq 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

Η αυτοσυσχέτιση του $\zeta_N[n]$ θα υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} R_{\zeta_N}(k) &= \mathcal{E}(\zeta_N(n)\zeta_N(n+k)) = \mathcal{E}(\langle \mathcal{I}_N(n) \rangle \langle \mathcal{I}_N(n+k) \rangle) = \\ &= \mathcal{E}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i e^{j2\pi i \mathcal{I}_N(n)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{j2\pi l \mathcal{I}_N(n+k)}\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_i c_l \Phi(i, l) \end{aligned} \quad (4.38)$$

όπου $\Phi(i, l) = \mathcal{E}(e^{j2\pi i \mathcal{I}_N(n) + j2\pi l \mathcal{I}_N(n+k)})$ η από-κοινού χαρακτηριστική συνάρτηση. Κάνοντας την απλή αλγεβρική παρατήρηση ότι :

$$i\mathcal{I}_N(n) + l\mathcal{I}_N(n+k) = \begin{cases} 0 & , i = l = 0 \\ \mathcal{I}_{N-1}(n) & , i + l = 0, i \neq 0 \\ \mathcal{I}_N(n) & , i + l \neq 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Weyl έχουμε ότι:

$$\Phi(i, l) = \begin{cases} 1 & , i = l = 0 \\ \int_0^1 e^{j2\pi r} dr & , \text{διαφορετικά} \end{cases} = \begin{cases} 1 & , i = l = 0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (4.40)$$

Επομένως, η αυτοσυσχέτιση του $\zeta_N[n]$ υπολογίζεται ως:

$$R_{\zeta_N}[k] = \begin{cases} \frac{1}{4} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 i^2} & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3} & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

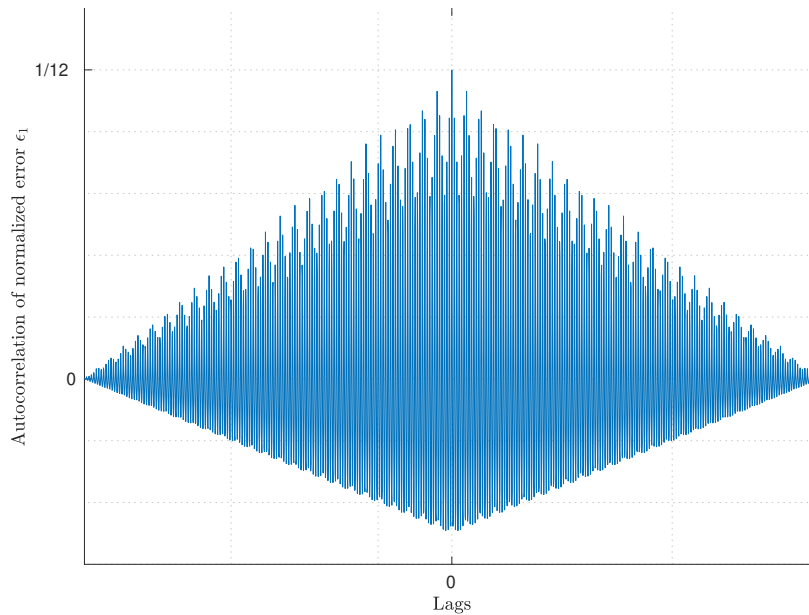
όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι: $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{3}$. Τελικά:

$$R_{\epsilon_N}(k) = \begin{cases} \frac{1}{12} & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

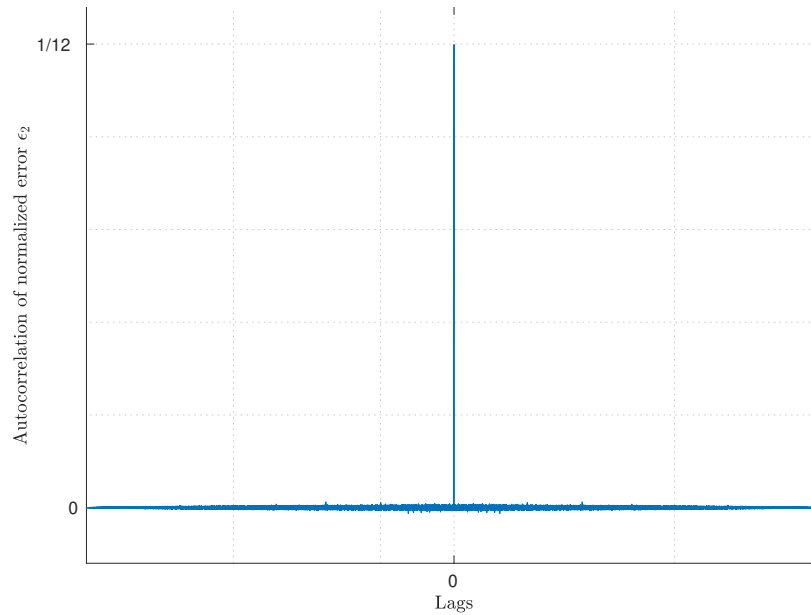
δηλαδή ο θόρυβος χβαντισμού του τελευταίου σταδίου είναι λευκός.

Από την εξίσωση 4.39 φαίνεται πάλι ότι η προϋπόθεση $N \geq 2$ είναι απαραίτητη στο αποτέλεσμα που εξήχθη. Αν $N = 1$ τότε το $\mathcal{I}_0(n)$ είναι απλώς ο σταθερός όρος και το θεώρημα Weyl δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

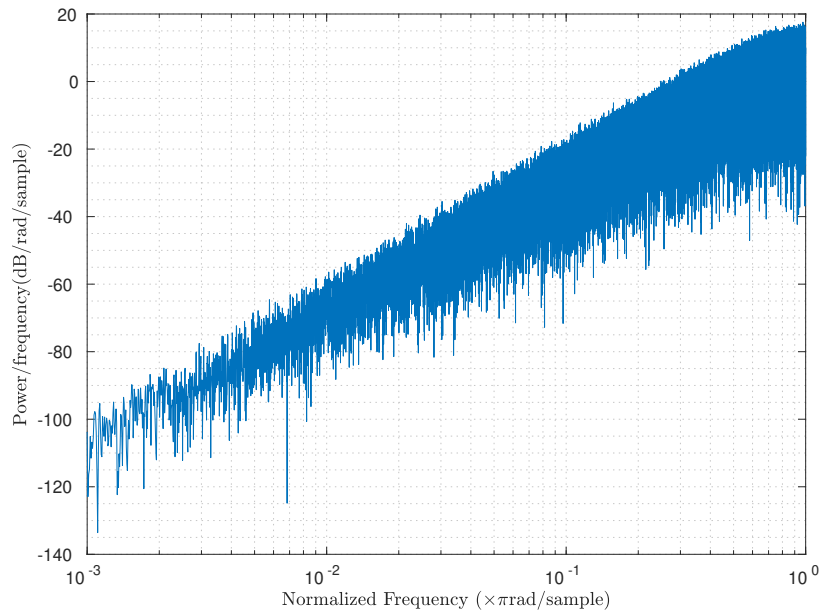
Παρακάτω παρουσιάζουμε τις αυτοσυσχετίσεις των δύο κανονικοποιημένων σφαλμάτων χβαντισμού ενός MASH διαμορφωτή 2 σταδίων με σταθερή είσοδο $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και με μηδενικές αρχικές συνθήκες, καθώς και το φάσμα της εξόδου του διαμορφωτή.



Εικόνα 4.11: Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος χβαντισμού ϵ_1 ενός MASH διαμορφωτή 2 σταδίων με σταθερή είσοδο $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



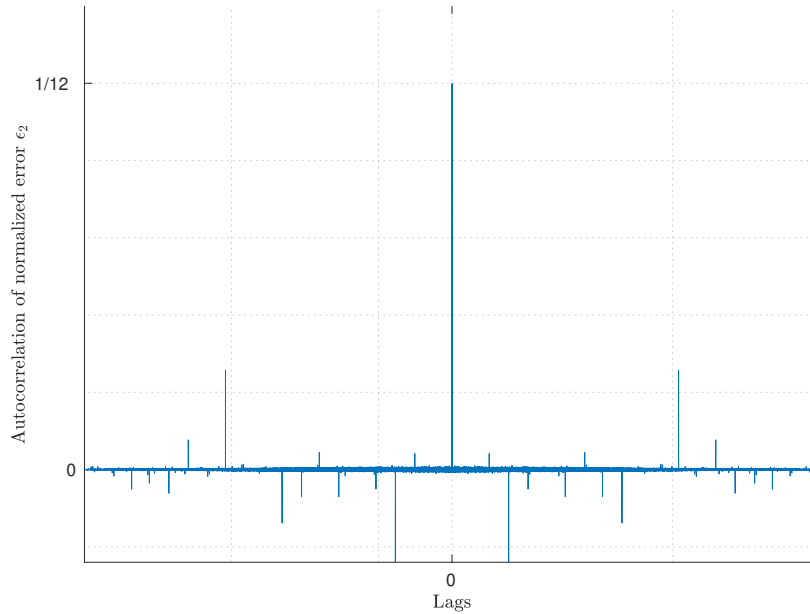
Εικόνα 4.12: Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού ϵ_2 ενός MASH διαμορφωτή 2 σταδίων με σταθερή είσοδο $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



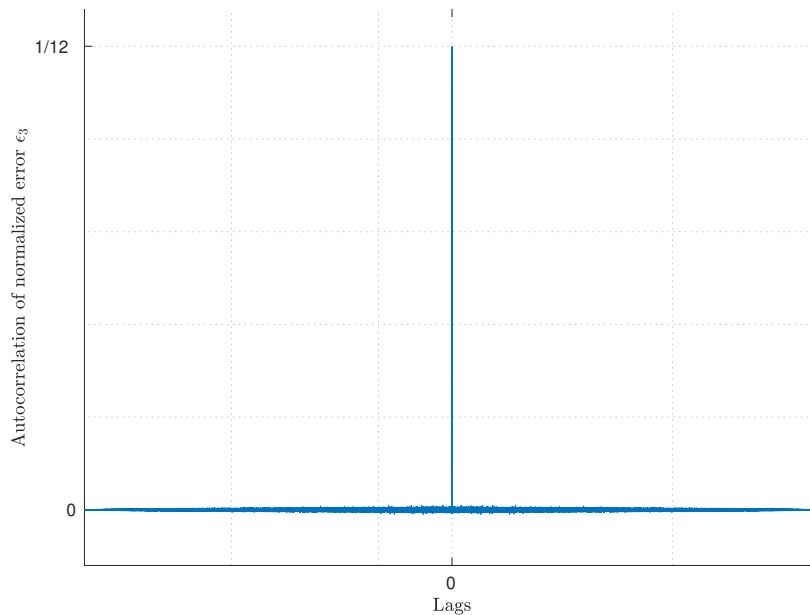
Εικόνα 4.13: Φάσμα εξόδου ενός MASH διαμορφωτή 2 σταδίων με άρρητη είσοδο $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Χρησιμοποιώντας τα ίδια εργαλεία με προηγουμένως, στο [31] αποδεικνύεται ότι σε έναν MASH διαμορφωτή τάξης $N \geq 3$ αν επιλέξουμε την πρώτη αρχική συνθήκη $x_1[0]$ να είναι άρρητη και θεωρώντας ρητή σταθερή είσοδο u , τότε ισχύουν οι εξισώσεις 4.34, 4.35, 4.42.

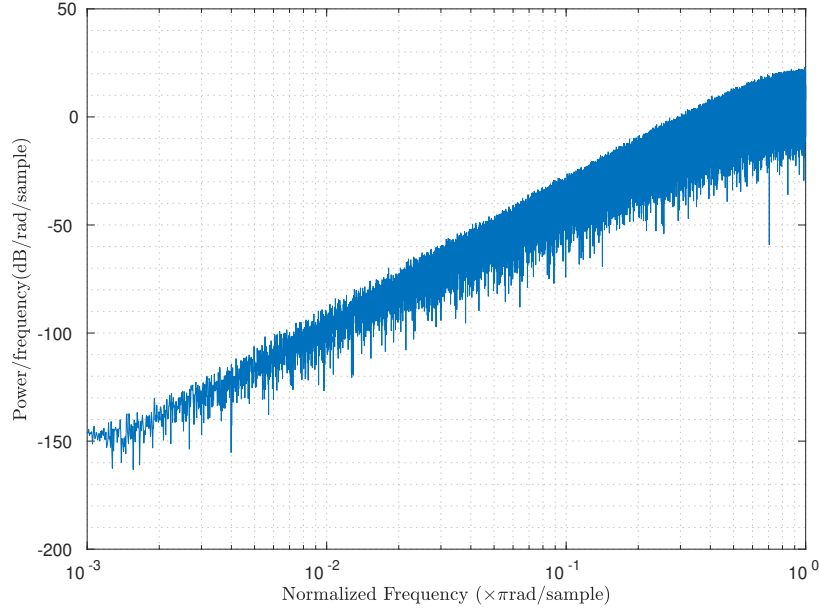
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις αυτοσυσχετίσεις των κανονικοποιημένων σφαλμάτων κβαντισμού ϵ_2 και ϵ_3 ενός MASH διαμορφωτή 3 σταδίων με ρητή σταθερή είσοδο $u = \frac{1}{2}$ και αρχική συνθήκη $x_1[0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$, καθώς και το φάσμα εξόδου, όπου παρατηρείται η εξάλειψη των spurs.



Εικόνα 4.14: Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού ϵ_2 ενός MASH διαμορφωτή 3 σταδίων με άρρητη αρχική συνθήκη $x_1[0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Εικόνα 4.15: Αυτοσυσχέτιση του κανονικοποιημένου σφάλματος κβαντισμού ϵ_3 ενός MASH διαμορφωτή 3 σταδίων με άρρητη αρχική συνθήκη $x_1[0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Εικόνα 4.16: Φάσμα εξόδου ενός MASH διαμορφωτή 3 σταδίων με άρρητη αρχική συνθήκη $x_1[0] = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4.6 Τροποποιημένες τοπολογίες ΣΔ Διαμορφωτών

Εκτός από τον καθορισμό της εισόδου και των αρχικών συνθηκών των ΣΔ Διαμορφωτών, με σκοπό την εξάλειψη των spurs, μπορούμε να τροποποιήσουμε τις ήδη υπάρχουσες τοπολογίες ΣΔ Διαμορφωτών, ώστε οι καινούργιες να έχουν τροχιές με μεγάλες περιόδους. Στη συνέχεια, θα αναλύσουμε μια τροποποιημένη τοπολογία EFM1.

4.6.1 Τροποποιημένη τοπολογία EFM1

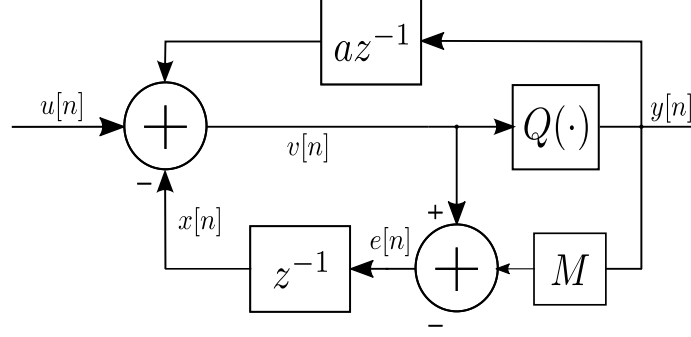
Στην εικόνα 4.17 παρουσιάζεται μια τροποποιημένη τοπολογία EFM1 που προτάθηκε στο [1]. Η διαφορά με τον κλασικό EFM1 βρίσκεται στο γεγονός ότι υπάρχει μονοπάτι ανάδρασης από την έξοδο απευθείας στην είσοδο του διαμορφωτή, μέσω ενός μπλοκ ανάδρασης αz^{-1} .

Λαμβάνοντας το γραμμικοποιημένο μοντέλο για τον κβαντιστή, έχουμε ότι:

$$STF(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (4.43)$$

$$NTF(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (4.44)$$

όπου $\alpha = \frac{a}{M}$ η κανονικοποίηση του a .



Εικόνα 4.17: Τροποποιημένη τοπολογία EFM1 [1].

Παρατηρούμε ότι η τροποποιημένη τοπολογία εισάγει έναν πόλο και στην STF και στην NTF στο $z = \alpha$. Για μικρές τιμές του α δεν επηρεάζεται σημαντικά η λειτουργία του διαμορφωτή στο in-band. Από τη σκοπιά του noise-shaping, αυτή η τροποποιημένη τοπολογία σπρώχνει τον θόρυβο σε συχνότητες κοντά στο $\frac{f_s}{2}$.

Παρακάτω θα δείξουμε ότι, για dc εισόδους, η περίοδος του συστήματος είναι σταθερή, ανεξάρτητη από την είσοδο και την αρχική συνθήκη του διαμορφωτή. Όπως και στον κλασικό EFM1 θα ισχύει ότι:

$$e[n] = v[n] \pmod{M} \quad (4.45)$$

Επιπλέον:

$$v[n] = u[n] + e[n-1] + ay[n-1] \quad (4.46)$$

Επομένως:

$$e[n] = (u[n] + e[n-1] + ay[n-1]) \pmod{M} \quad (4.47)$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να δείξουμε, με παρόμοιο τρόπο με τον κλασικό EFM1, ότι:

$$e[n] = (x[0] + \sum_{i=0}^n u[i] + a \sum_{i=0}^{n-1} y[i]) \pmod{M} \quad (4.48)$$

Για dc είσοδο $u[n] = u$, θα έχουμε ότι:

$$e[n] = (x[0] + (n+1)u + a \sum_{i=0}^{n-1} y[i]) \quad (4.49)$$

Ταυτόχρονα, έχουμε ότι: $e[n] = v[n] - My[n] = u + e[n-1] + ay[n-1] - My[n] \Rightarrow My[n] - ay[n-1] = u + e[n-1] - e[n]$

$$\Rightarrow M \sum_{i=1}^n y[i] - a \sum_{i=0}^{n-1} y[i] = nu + e[0] - e[n] \quad (4.50)$$

Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι περιοδικό με περίοδο L . Τότε $e[0] = e[L]$ και $\sum_{i=1}^L y[i] = \sum_{i=0}^{L-1} y[i]$ και από την εξίσωση 4.50, θα ισχύει ότι:

$$(M-a) \sum_{i=1}^L y[i] = Lu \Rightarrow \sum_{i=1}^L y[i] = \frac{Lu}{M-a} \quad (4.51)$$

Επιπλέον, από τη συνθήκη $e[n] = e[n + L] \forall n \geq 0$ για περιοδικότητα με περίοδο L , και από τη σχέση 4.47 θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
(Lu + a \sum_{i=n}^{n+L-1} y[i]) \bmod M = 0 &\xrightarrow{n=0} (Lu + a \sum_{i=0}^{L-1} y[i]) \bmod M = 0 \\
\Rightarrow (Lu + a \sum_{i=1}^L y[i]) \bmod M = 0 &\xrightarrow{4.51} (Lu + \frac{Lu}{M-a}) \bmod M = 0 \Rightarrow \\
\frac{Lu}{M-a} \bmod M = 0 & \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε το $M - a$ να είναι πρώτος, και αν $0 < u < M - a$, τότε το ελάχιστο L για το οποίο θα ισχύει η 4.52 θα είναι $L = M - a$, για κάθε dc είσοδο u και για κάθε αρχική συνθήκη $x[0]$

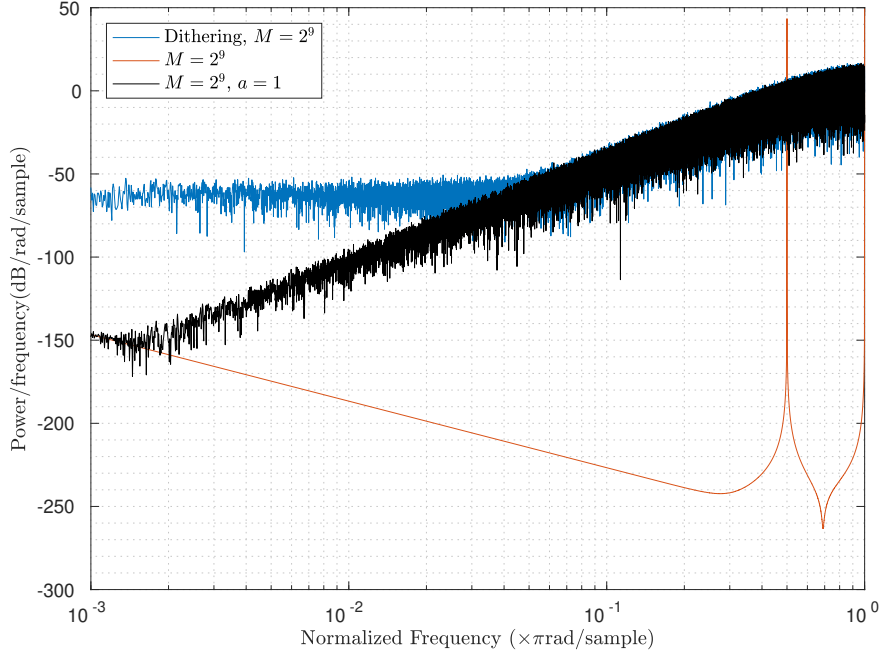
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την τροποποιημένη τοπολογία EMF για να κατασκευάσουμε έναν MASH διαμορφωτή. Θα δείξουμε και πάλι ότι η περίοδος του N-οστής τάξης MASH θα είναι σταθερή, ανεξάρτητη από την dc είσοδο u και τις αρχικές συνθήκες. Θα δείξουμε το αποτέλεσμα για τον 2^{ος} τάξης MASH, το αποτέλεσμα γενικεύεται εύκολα και για μεγαλύτερες τάξεις.

Εν γένει, όπως έχουμε ξαναδεί, αν ο N-οστής τάξης MASH διαμορφωτής έχει περίοδο L_N τότε θα πρέπει να ισχύει ότι: $L_N = kL_1$, $k \in \mathbb{N}$, όπου L_1 η περίοδος του βασικού μπλοκ EMF1. Από το σχήμα 3.10 και από την εξίσωση 4.51 θα έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{L_2} y_2[i] = \left(\frac{1}{M-a}\right) \sum_{i=1}^{L_2} e_1[i] \Rightarrow \sum_{i=1}^{kL_1} y_2[i] = \left(\frac{1}{M-a}\right) \sum_{i=1}^{kL_1} e_1[i] = \left(\frac{K}{L_1}\right) \sum_{k=1}^{L_1} e_1[i] \tag{4.53}$$

Αν υποθέσουμε ότι $\gcd(L_1, \sum_{k=1}^{L_1} e_1[i]) = 1$, τότε $K = L$, και άρα $L_2 = (M - a)^2$. Η συνθήκη αυτή ισχύει, αλλιώς το K δεν θα ήταν μοναδικό. Παρομοίως, για τον N-οστής τάξης $\Sigma\Delta$ διαμορφωτή θα έχουμε ότι $L_N = (M - a)^N$.

Παρακάτω, παρουσιάζουμε γράφημα του φάσματος εξόδου ενός 3^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή, που καταδεικνύει την απόδοση αυτής της τροποποιημένης τοπολογίας EFM1:



Εικόνα 4.18: Σύγκριση του φάσματος εξόδου ενός 3^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή βασισμένου στον τροποποιημένο EFM1, αυτού ενός 3^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή με απλούς EFM1 όπου έχει εφαρμοστεί dithering και ενός απλού 3^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε είσοδο $u = 256$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Σε σύγκριση με τον απλό MASH διαμορφωτή, αυτός που βασίζεται στην τροποποιημένη τοπολογία EFM1 παρατηρούμε ότι κατανέμει τον θόρυβο χβαντισμού σημαντικά καλύτερα στους τόνους του φάσματος εξόδου. Επιπλέον, στην εικόνα 4.18 παρουσιάζεται η σύγκριση των μεθόδων του τροποποιημένου EFM1 και του dithering. Και οι δύο τεχνικές πετυχαίνουν τον στόχο τους που είναι η εξάλειψη των spurs. Σε υψηλές συχνότητες τα δύο φάσματα σχεδόν ταυτίζονται. Όμως, στην περίπτωση που έχει εφαρμοστεί dithering, ο in-band θόρυβος αυξάνεται εξαιτίας της συνεισφοράς του dithering. Συνεπώς, η μέθοδος της τροποποιημένης τοπολογίας EFM1 είναι προτιμότερη.

4.6.2 EFM με modulus πρώτο αριθμό

Ο τροποποιημένος EFM της προηγούμενης ενότητας μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένας κλασικός EFM με modulus M πρώτο αριθμό αντί για 2^{n_0} . Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε κάτι γενικότερο, ότι αν ένας EFM1 έχει modulus πρώτο αριθμό, τότε, για σταθερή είσοδο, το σύστημα της N -οστής τάξης MASH τοπολογίας που κατασκευάζεται με βάση αυτόν τον EFM1 θα είναι περιοδικό με περίοδο M , ανεξάρτητα από την τιμή της εισόδου, τις αρχικές συνθήκες και την τάξη N , αρκεί να ισχύει ότι $M > N$ [39].

Για τον N-οστής τάξης MASH διαμορφωτή της εικόνας 3.10 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} e_1[n] &= (u + e_1[n-1]) \pmod{M} \\ e_2[n] &= (e_1[n] + e_2[n-1]) \pmod{M} \\ &\vdots \\ e_N[n] &= (e_{N-1}[n] + e_N[n-1]) \pmod{M} \end{aligned}$$

Σε μορφή πινάκων, οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως:

$$\mathbf{e}[n+1] = (A\mathbf{e}[n] + Bu) \pmod{M} \quad (4.54)$$

$$\text{όπου: } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}[n] = \begin{bmatrix} e_1[n] \\ e_2[n] \\ \vdots \\ e_N[n] \end{bmatrix}.$$

Ακολουθώντας παρόμοια βήματα με αυτά που ακολουθήσαμε στην ανάλυση του MODN, έχουμε ότι:

$$\mathbf{e}[n] = A^n \mathbf{e}[0] + \sum_{i=0}^{n-1} A^i B u \quad (4.55)$$

όπου τα A^n και $\sum_{i=0}^{n-1} A^i B$ υπολογίζονται από τις εξισώσεις 3.21 και 3.23 αντίστοιχα.

Έστω ότι το σύστημα είναι περιοδικό με περίοδο L. Τότε $\mathbf{e}[L] = \mathbf{e}[0]$ και αναπτύσσοντας τη σχέση 4.55 κατά γραμμές θα έχουμε ότι:

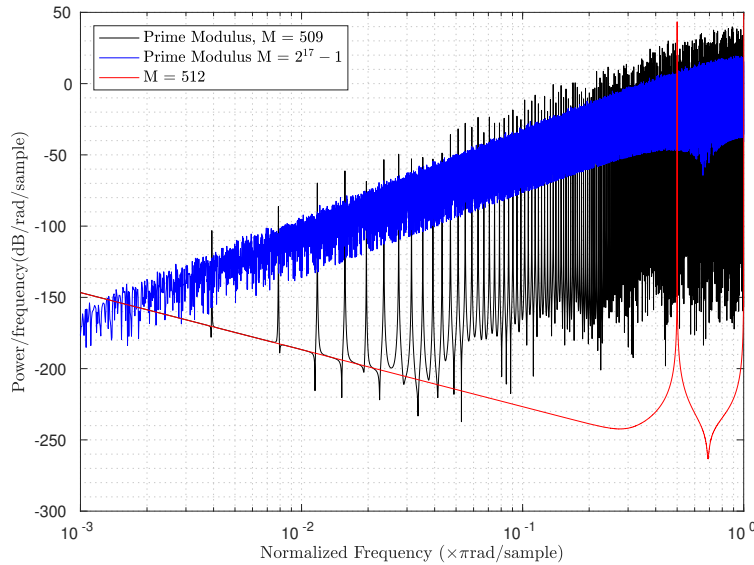
$$\begin{aligned} \left(\binom{L}{1} u \right) \pmod{M} &= 0 \\ \left(\binom{L}{1} e_1[0] + \binom{L+1}{2} u \right) \pmod{M} &= 0 \\ &\vdots \\ \left(\binom{L+N-2}{N-1} e_1[0] + \dots + \binom{L}{1} e_{N-1}[0] + \binom{L+N-1}{N} u \right) \pmod{M} &= 0 \end{aligned}$$

Θεωρώντας την πρώτη και την τελευταία από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι:

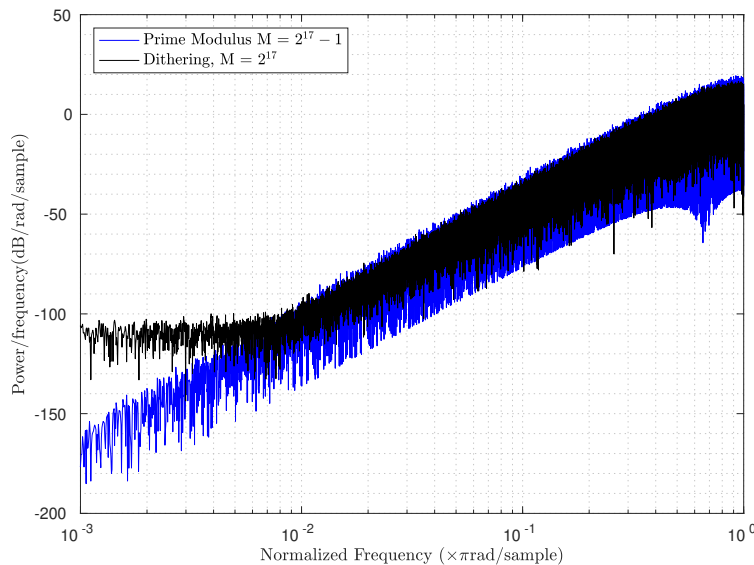
$$\begin{aligned} (Lu) \pmod{M} &= 0 \\ L \left(\frac{(L+1) \dots (L+N-2)}{(N-1)!} e_1[0] + \dots + e_{N-1}[0] + \frac{(L+1) \dots (L+N-1)}{N!} u \right) \pmod{M} &= 0 \end{aligned}$$

Επειδή ο M είναι πρώτος, η ελάχιστη λύση που ικανοποιεί την πρώτη εξίσωση είναι $L = M$, για $0 < u < M$. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι το γινόμενο N διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το $N!$, δηλαδή $N! \mid (L+1) \dots (L+N-1)(L+N)$. Εάν $L > N$, το $L+N$ δεν διαιρείται με το $N!$. Επομένως, συνδυάζοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις, θα πρέπει $N! \mid (L+1) \dots (L+N-1)$.

Με το ίδιο σκεπτικό, όλοι οι όροι εντός της παρένθεσης στην τελευταία εξίσωση είναι ακέραιοι, για $L > N$. Επομένως $L = M$.



Εικόνα 4.19: Σύγκριση του φάσματος εξόδου ενός 3^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή με πρώτο modulus $M = 509$, με πρώτο modulus $M = 2^{17} - 1$ και με modulus $M = 512$. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε είσοδο $u = 256$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.



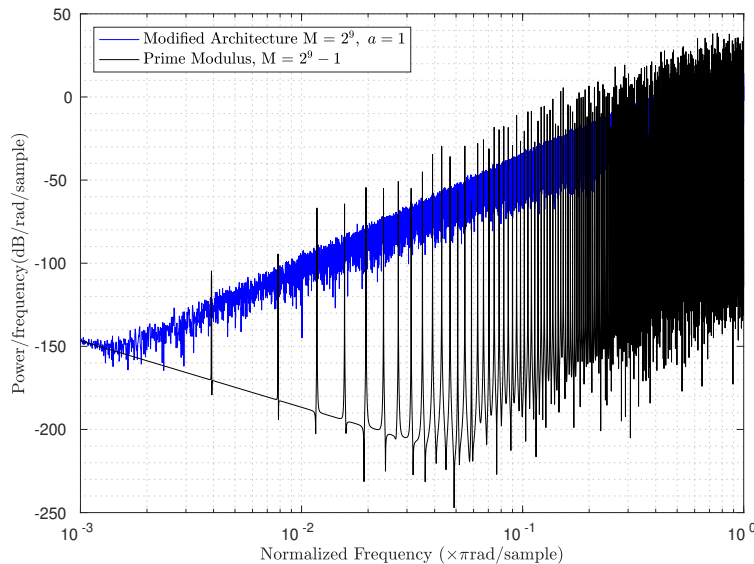
Εικόνα 4.20: Σύγκριση του φάσματος εξόδου ενός 3^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή με πρώτο modulus $M = 2^{17} - 1$ και με modulus $M = 2^{17}$ όπου έχει εφαρμοστεί dithering. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε είσοδο $u = 256$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Από την εικόνα 4.19 παρατηρούμε ότι ο διαμορφωτής με πρώτο modulus κατανέμει πολύ

καλύτερα τον θόρυβο κβαντισμού στους τόνους του φάσματος εξόδου. Για να επιτύχουμε πιο λείο φάσμα στην έξοδο αρκεί να αυξήσουμε το modulus.

Συγκρίνοντας τις μεθόδους του πρώτου modulus και του dithering (εικόνα 4.20), παρατηρούμε ότι και οι δύο επιτελούν τον σκοπό τους για την εξάλειψη των spurs. Σε υψηλές συχνότητες τα δύο φάσματα σχεδόν ταυτίζονται. Όμως, και πάλι, σε χαμηλές συχνότητες το πρώτο modulus προτιμάται έναντι του dithering.

Τέλος, όσον αφορά τη σύγκριση μεταξύ των μεθόδων της τροποποιημένης τοπολογίας EFM1 και του διαμορφωτή με πρώτο modulus, προτιμάται η πρώτη καθώς με αυτή επιτυγχάνεται μεγαλύτερη μεγιστοποίηση της περιόδου εξόδου, όπως έδειξε η μαθηματική ανάλυση. Αυτό φαίνεται και από την εικόνα 4.21. Για το ίδιο modulus, επιτυγχάνεται πιο λείο φάσμα στην περίπτωση του τροποποιημένου EFM1 παρά με την τεχνική του πρώτου modulus.

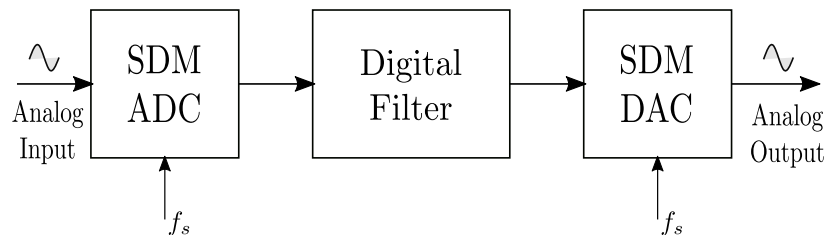


Εικόνα 4.21: Σύγκριση του φάσματος εξόδου ενός 3^{ης} τάξης MASH διαμορφωτή με πρώτο modulus $M = 2^{17} - 1$ και ενός με modulus $M = 2^{17}$ που βασίζεται στον τροποποιημένο EFM1. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε είσοδο $u = 256$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

5. Ψηφιακό Φιλτράρισμα βασισμένο σε ΣΔ Διαμορφωτές και τεχνικές Stochastic Computing

5.1 Εισαγωγή

Μέχρι στιγμής, έχουμε ασχοληθεί κυρίως με τους ΣΔ Διαμορφωτές με σταθερή είσοδο. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα χρησιμοποιήσουμε τους ΣΔ διαμορφωτές ως βασικό στοιχείο ενός σχήματος ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (DSP scheme).



Εικόνα 5.1: Κλασικό σχήμα DSP

Στην εικόνα 5.1 παρουσιάζεται ένα συνηθισμένο σχήμα ψηφιακού φιλτραρίσματος, που βασίζεται πάνω σε ΣΔ διαμορφωτές. Το αναλογικό σήμα μετατρέπεται σε multi-bit ή 1-bit ψηφιακό μέσω ενός ΣΔ ADC, στη συνέχεια το ψηφιακό σήμα φιλτράρεται από ένα ψηφιακό φίλτρο και τέλος χρησιμοποιείται ένας ΣΔ DAC για να μετατραπεί το σήμα πάλι σε αναλογικό. Ταυτόχρονα επωφελούμαστε από το oversampling και το noise-shaping του ΣΔ διαμορφωτή. Το φιλτράρισμα ακολουθιών εξόδου ΣΔ διαμορφωτών έχει μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία.

Όμως, η συνεχώς αυξανόμενη ανάγκη για πιο αποδοτική υπολογιστική επεξεργασία, μας έχει οδηγήσει στην αναζήτηση εναλλακτικών για τους συμβατικούς δυαδικούς υπολογισμούς. Μια εξ αυτών των εναλλακτικών, που θεωρείται αρκετά υποσχόμενη, είναι το Stochastic Computing (SC) [40].

Το SC επεξεργάζεται σήματα με το να κωδικοποιεί τις πραγματικές δυαδικές τιμές τους σε στοχαστικές ακολουθίες [41]. Συνεπώς, η πιθανοτική φύση του το κάνει να είναι αρκετά ανεκτικό σε σφάλματα, όπως bit-flips, που προέρχονται από διάφορες πηγές θορύβου. Επιπλέον, με το SC μπορούμε να κάνουμε και βασικές και πιο σύνθετες αριθμητικές πράξεις με αμελητέο

κόστος σε επίπεδο πυλών, σε σύγκριση με τις αντίστοιχες δυαδικές υλοποιήσεις. Αυτά τα πλεονεκτήματα έχουν ως αποτέλεσμα πολλές εφαρμογές να βασίζονται σε SC υλοποιήσεις, σε πεδία όπως τα Νευρωνικά Δίκτυα [42], την ψηφιακή ανάλυση εικόνας [43] κ.α.

Ένα από τα πεδία στα οποία το SC έχει βρει ευρεία εφαρμογή είναι η υλοποίηση ψηφιακών φίλτρων. Συγκεκριμένα, όσον αφορά τα Nyquist φίλτρα, έχει δειχθεί ότι οι SC υλοποιήσεις είναι hardware-efficient [44–47]. Επιπλέον, το φιλτράρισμα κωδικοποιημένων σημάτων μέσω ενός ΣΔ διαμορφωτή έχει μελετηθεί στο [48]. Όμως, σε αυτή την εργασία, δεν μελετάται το στάδιο του ΣΔ διαμορφωτή και η έξοδός του θεωρείται δεδομένη. Βασιζόμενοι στο [48], επεκτείνουμε τον συνδυασμό ΣΔ διαμορφωτών με ψηφιακά φίλτρα υλοποιημένα με μεθόδους SC σε ένα γενικότερο σχήμα DSP και μελετάμε πως επηρεάζουν οι ιδιότητες του ΣΔ διαμορφωτή τις φασματικές ιδιότητες του τελικού σήματος εξόδου.

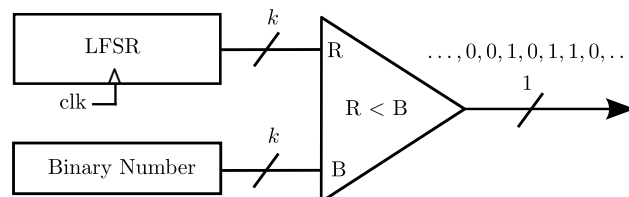
Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε ορισμένα βασικά στοιχεία από τη θεωρία του Stochastic Computing, θα παρουσιάσουμε το προτεινόμενο σχήμα ψηφιακού φιλτραρίσματος, που αποτελείται από έναν πρώτης τάξης 1-bit ΣΔ διαμορφωτή και από ένα FIR φίλτρο που έχει υλοποιηθεί με τεχνικές SC, και θα εξηγήσουμε την αρχή λειτουργίας του, και τέλος θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα προσομοίωσης που επιβεβαιώνουν την ορθή λειτουργία του καθώς και τα αποτελέσματα από μια πρωταρχική σύνθεση FPGA, μαζί με συγκρίσεις με τη κλασική δυαδική υλοποίηση.

Μέρος αυτού του κεφαλαίου δημοσιεύτηκε στο συνέδριο MOCASST 2021 [49].

5.2 Θεωρία Stochastic Computing

5.2.1 Παραγωγή στοχαστικών ακολουθιών και αναπαράσταση αριθμών

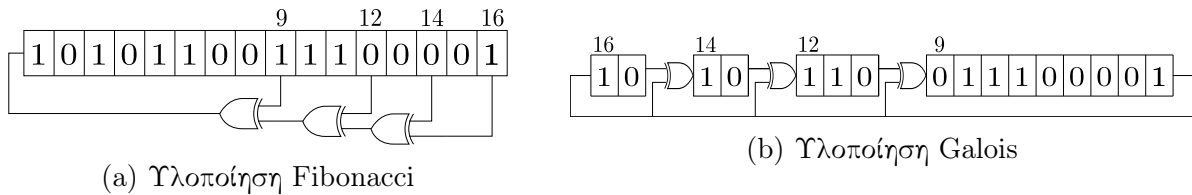
Όπως έχουμε αναφέρει, τα στοχαστικά κυκλώματα επεξεργάζονται τους αριθμούς ως στοχαστικές ακολουθίες. Αυτές οι ακολουθίες ονομάζονται στοχαστικοί αριθμοί (Stochastic Numbers SNs). Η μετατροπή ενός δυαδικού αριθμού σε στοχαστικό γίνεται με τη χρήση μιας γεννήτριας στοχαστικών αριθμών (Stochastic Number Generator SNG), που παρουσιάζεται στην εικόνα 5.2. Αυτό το κύκλωμα συγκρίνει, σε κάθε κύκλο ρολογιού, έναν τυχαίο ή ψευδο-τυχαίο αριθμό k -bits, ομοιόμορφα κατανομημένο στο $\mathcal{R}_S = \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$, με τον επιθυμητό δυαδικό αριθμό $B \in [0, 1]$, που έχει το ίδιο μήκος k . Μετά από $N = 2^k$ κύκλους ρολογιού, παράγεται η ακολουθία-στοχαστικός αριθμός μήκους N .



Εικόνα 5.2: Γεννήτρια Στοχαστικών Αριθμών SNG

Αντί για μια πραγματική γεννήτρια τυχαίων αριθμών, συνήθως χρησιμοποιείται ένας Linear-Feedback Shift Register (LFSR). Η λειτουργία του είναι ντετερμινιστική, δηλαδή η επόμενη κατάσταση του εξαρτάται αποκλειστικά από την προηγούμενη. Επιπλέον έχει πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων, επομένως μετά από κάποιους κύκλους ρολογιού θα επιστρέψει στις ίδιες καταστάσεις. Όμως, αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του LFSR επιλεγεί να είναι πρωταρχικό (primitive), τότε θα παραχθούν ψευδοτυχαίες ακολουθίες και ο LFSR θα έχει μεγάλο κύκλο $2^k - 1$, αν έχουμε θεωρήσει k-bit καταχωρητή [50]. Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι, μετά από N κύκλους ρολογιού, ο LFSR θα περάσει πάλι από τις 2^k καταστάσεις του, εμφανίζοντας συσχέτιση στα παραγόμενα bit εξόδου [2].

Παρακάτω παρουσιάζουμε 2 υλοποιήσεις LFSR, τη Fibonacci και τη Galois:



Εικόνα 5.3: Υλοποιήσεις LFSR

Για παράδειγμα, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του LFSR της εικόνας 5.3a είναι το $x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^9 + 1$

Μιλώντας πιο φορμαλιστικά, η N-bit ακολουθία που παράγεται από τον SNG, δηλαδή η $\{X_n\}_{n=1}^N$, όπου το n δείχνει τον τρέχοντα κύκλο ρολογιού, προσεγγίζει μια διαδικασία Bernoulli. Συνεπώς, η τιμή του παραγόμενου SN ανήκει στο $[0, 1]$, γνωστή και ως μονοπολική μορφή (unipolar format), με πιθανότητα που ορίζεται ως $X := P(X_n = 1)$ και μέση τιμή που δίνεται από το:

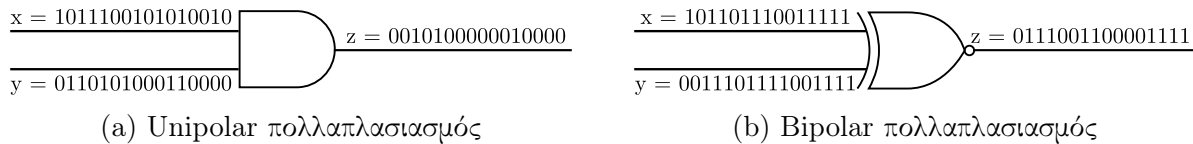
$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (5.1)$$

Εκτός από τους θετικούς αριθμούς, και οι αρνητικοί αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν στα πλαίσια του SC, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $X \rightarrow 2X - 1$, ο οποίος απεικονίζει το $[0, 1]$ στο $[-1, 1]$. Αυτή η μορφή ονομάζεται διπολική (bipolar format).

5.2.2 Αριθμητικές Πράξεις

Οι απλές αριθμητικές πράξεις υποστηρίζονται στα πλαίσια του SC.

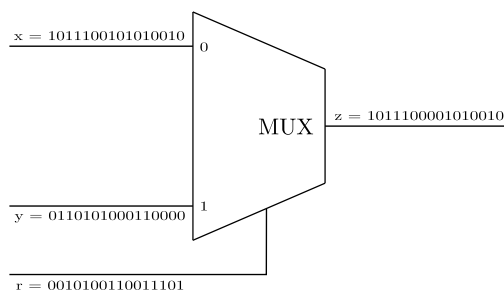
1. Πολλαπλασιασμός: Ο πολλαπλασιασμός επιτελείται πολύ απλά με τη χρήση μιας λογικής πύλης. Αν θεωρήσουμε unipolar format, ο πολλαπλασιασμός γίνεται με τη χρήση μιας πύλης AND, ενώ αν θεωρήσουμε bipolar format τότε γίνεται με τη χρήση μιας πύλης XNOR. Το τελευταίο ισχύει επειδή: $Z = (1 - X)(1 - Y) \Rightarrow Z_{bi} = X_{bi}Y_{bi}$, όπου X_{bi} η bipolar τιμή του στοχαστικού αριθμού x .
2. Πρόσθεση: Η πρόσθεση μεταξύ δύο SNs επιτελείται συνήθως με τη χρήση ενός πολυπλέκτη (MUX) 2-σε-1, ο οποίος επιτελεί τη λογική πράξη: $z = (x \wedge r') \vee (y \wedge r)$, όπου



Εικόνα 5.4: Πολλαπλασιασμός μεταξύ 2 SNs

x, y είναι οι SNs που μπαίνουν ως είσοδοι στον πολυπλέκτη και r το σήμα ελέγχου. Το σήμα ελέγχου r επιλέγεται να είναι ομοιόμορφα κατανομημένο έτσι ώστε η unipolar τιμή του να είναι $R = 0.5$. Συνεπώς το αποτέλεσμα της πράξης θα είναι το:

$$Z = 0.5X + 0.5Y$$



Εικόνα 5.5: Πολυπλέκτης ως στοχαστικός αθροιστής. $X = 8/16$, $Y = 6/16$ και $Z = 1/2(X+Y) = 7/16$

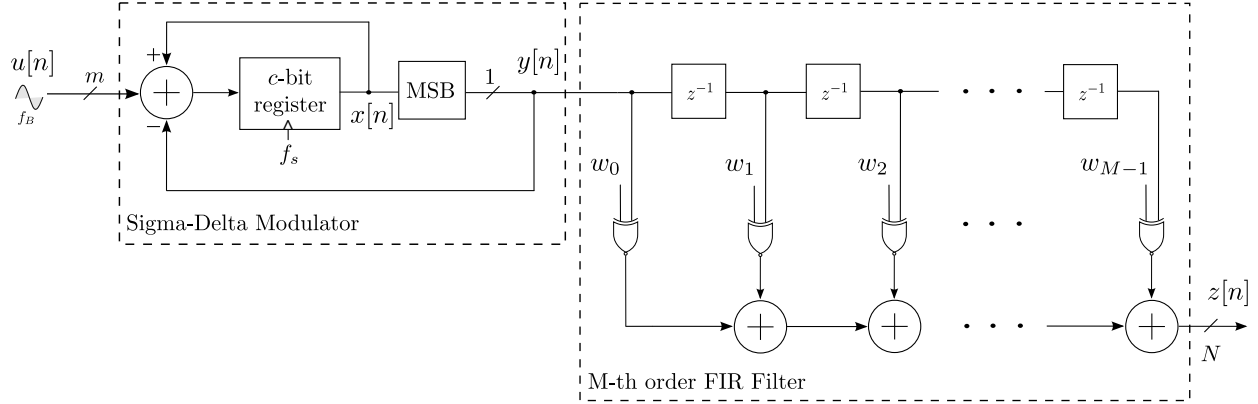
Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι scaled κατά 0.5. Η πρόσθεση με χρήση πολυπλέκτη είναι αναλοιώτη από τη μορφή των SNs, unipolar ή bipolar.

5.3 Προτεινόμενο MOD1-SC σχήμα DSP

Στην εικόνα 5.6 παρουσιάζεται το προτεινόμενο σχήμα DSP [49]. Αποτελείται από δύο τμήματα, έναν MOD1 ακολουθούμενο από ένα FIR φίλτρο $(M-1)$ τάξης. Η κύρια ιδέα της υλοποίησης είναι ότι το multi-bit σήμα εισόδου μετατρέπεται σε 1-bit μέσω του MOD1. Στη συνέχεια, εκμεταλλευόμαστε την 1-bit κωδικοποίηση του σήματος ώστε να υλοποιήσουμε το φίλτρο με μεθόδους SC.

5.3.1 Ψηφιακή Αναπαράσταση MOD1

Στην εικόνα 5.1 ο MOD1 που παρουσιάζεται είναι η ψηφιακή υλοποίηση του MOD1 της εικόνας (2.1). Ο ολοκληρωτής έχει αντικατασταθεί από έναν c -bit καταχωρητή που υλοποιεί τη δυναμική του MOD1, σύμφωνα με τις εξισώσεις 2.1 και 2.2. Το μέγεθος c του καταχωρητή πρέπει να είναι μεγαλύτερο από τα m bits του σήματος εισόδου. Τυπικά $c = m + 1$.



Εικόνα 5.6: Προτεινόμενο MOD1-SC σχήμα DSP. Ο MOD1 κωδικοποιεί ένα multi-bit σήμα σε 1-bit, όπου τα 0 και 1 μεταφέρουν την πληροφορία των -1 και 1 αντίστοιχα. Στη συνέχεια, το 1-bit σήμα φιλτράρεται από ένα FIR φίλτρο $(M-1)$ τάξης.

Η μη-γραμμική λειτουργία του χβαντιστή μοντελοποιείται απλά ως το MSB του καταχωρητή. Αυτό συμβαίνει επειδή η είσοδος $u[n]$ καθορίζει αν η τρέχουσα τιμή του καταχωρητή είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0, επομένως δεν χρειάζεται περαιτέρω πληροφορία από το MSB. Τέλος, επειδή στην έξοδο προκύπτουν 0 αντί για -1 , χρησιμοποιούνται μέθοδοι επέκτασης προσήμου έτσι ώστε να επιστρέψει η σωστή τιμή μέσω ανάδρασης.

Πρέπει να τονίσουμε ότι η μέγιστη συχνότητα λειτουργίας του MOD1 f_s καθορίζει τις εξής 2 παραμέτρους: 1) το μέγιστο OSR που μπορεί να επιλεγεί και 2) τη μέγιστη συχνότητα του σήματος εισόδου f_B που μπορεί να επεξεργαστεί η συγκεκριμένη αρχιτεκτονική.

5.3.2 Στοχαστικό FIR φίλτρο

Ένα Finite Impulse Response (FIR) φίλτρο $(M-1)$ τάξης υπολογίζει κάθε τιμή της ακολουθίας εξόδου του ως ένα σταθμισμένο άθροισμα από τις M πιο πρόσφατες τιμές εισόδου, δηλαδή:

$$z[n] = \sum_{i=0}^{M-1} w_i y[n-i] \quad (5.2)$$

όπου $z[n]$, $y[n]$ είναι τα σήματα εισόδου και εξόδου αντίστοιχα και w_i τα βάρη του φίλτρου.

Η συνιθισμένη δυαδική υλοποίηση ενός FIR φίλτρου $(M-1)$ τάξης απαιτεί M στοιχεία καθυστέρησης (buffers), M δυαδικούς πολλαπλασιαστές με μήκος $m+l$ bit, όπου m και l η ακρίβεια των bit του σήματος εισόδου και των βαρών αντίστοιχα και έναν δυαδικό αθροιστή με κατάλληλο αριθμό bits. Συνήθως αυτός ο αριθμός είναι $m+l+\log_2(M)-1$ [51]. Στην περίπτωση μας, η 1-bit κωδικοποίηση του MOD1 μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε τεχνικές SC και να αντικαταστήσουμε τους M δυαδικούς πολλαπλασιαστές με M πύλες XNOR.

Συνήθως, στη SC υλοποίηση ενός FIR φίλτρου, οι M δυαδικοί πολλαπλασιαστές αντικαθίστανται από M πύλες XNOR (ώστε να μπορούμε να χειριζόμαστε και αρνητικά βάρη) και η άθροιση γίνεται με τη χρήση πολυπλεκτών. Εναλλακτικά, στο [44] έχει προταθεί ένα MUX tree

που υλοποιεί το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{w} \cdot \mathbf{y}$, όπου $\mathbf{w} = [w_0, \dots, w_{M-1}]$ και $\mathbf{y} = [y[0], \dots, y[n - M + 1]]$

Για να μειώσουμε περαιτέρω το κόστος υλικού [52, 53], αντικαθιστούμε τους πολυπλέκτες με έναν απλό δυαδικό αθροιστή $N = \lceil \log_2 M \rceil$ -bits, δεδομένου του ότι $z[n] \in \{0, 1, \dots, M-1\}$. Τέλος, στην ακολουθία εξόδου εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $z[n] \rightarrow 2z[n] - M$, ώστε το αποτέλεσμα της άθροισης να είναι συνεπές με τη bipolar μορφή που έχουμε επιλέξει.

5.3.3 Παραγωγή των βαρών ως SNGs

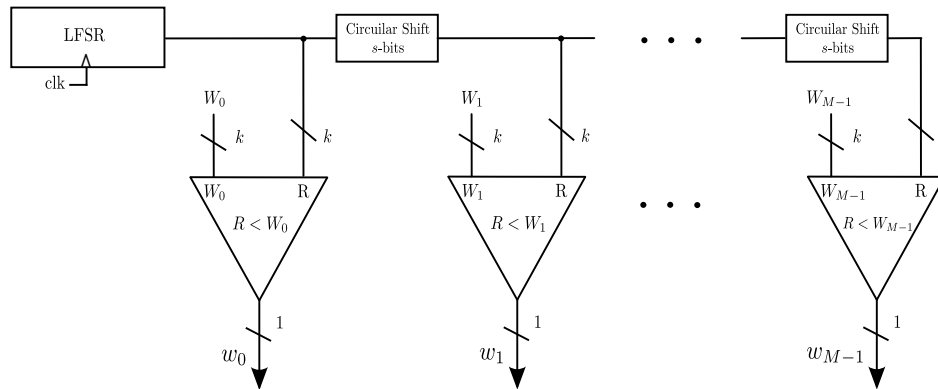
Κανονικά, για να μετατρέψουμε τα M βάρη w_i σε στοχαστικές ακολουθίες θα απαιτούνταν M SNGs. Οι M SNGs όμως απαιτούν M LFSR των k -bits το καθένα, που, σε συνδυασμό με τους αντίστοιχους συγκριτές, επιβαρύνουν επιπλέον το υλικό κόστος της αρχιτεκτονικής.

Μια πρώτη σχέση θα ήταν όλοι οι SNGs να μοιράζονται τον ίδιο LFSR ως την απαιτούμενη γεννήτρια τυχαίου σήματος. Τότε όμως οι παραγόμενες στοχαστικές ακολουθίες θα ήταν μέγιστα συσχετισμένες μεταξύ τους [2], με αποτέλεσμα να υποβιβαστεί η ποιότητα του σήματος εξόδου.

Λύση σε αυτό το πρόβλημα προσφέρει το σχήμα SNGs της εικόνας 5.7 [2], όπου χρησιμοποιείται κυκλική ολίσθηση στην κατάσταση του LFSR. Η κυκλική ολίσθηση εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι ο LFSR περνάει από κάθε κατάσταση μόνο μία φορά. Επομένως, οι στοχαστικές ακολουθίες που παράγονται δεν είναι συσχετισμένες μεταξύ τους. Έστω ότι η τρέχουσα τιμή του LFSR είναι $R_{n,i}$, τότε η επόμενη τιμή μετά την κυκλική ολίσθηση κατά s -bits θα είναι :

$$R_{n,i+1} := R_{(n-s,i)_N} = R_{(n-s,i)} \bmod N \quad (5.3)$$

όπου $i = 1, 2, \dots, M$ και $s \in \mathbb{N}^*$ με την προϋπόθεση ότι $s < k$.



Εικόνα 5.7: Σχήμα SNG με διαμοιραζόμενο LFSR με χρήση κυκλικής ολίσθησης [2]

5.4 Αποτελέσματα προσομοίωσης

Σε αυτή την ενότητα, θα αξιολογήσουμε την επίδοση του προτεινόμενου MOD1-SC σχήματος DSP, παρουσιάζοντας αποτελέσματα προσομοιώσεων που έγιναν χρησιμοποιώντας το Matlab.

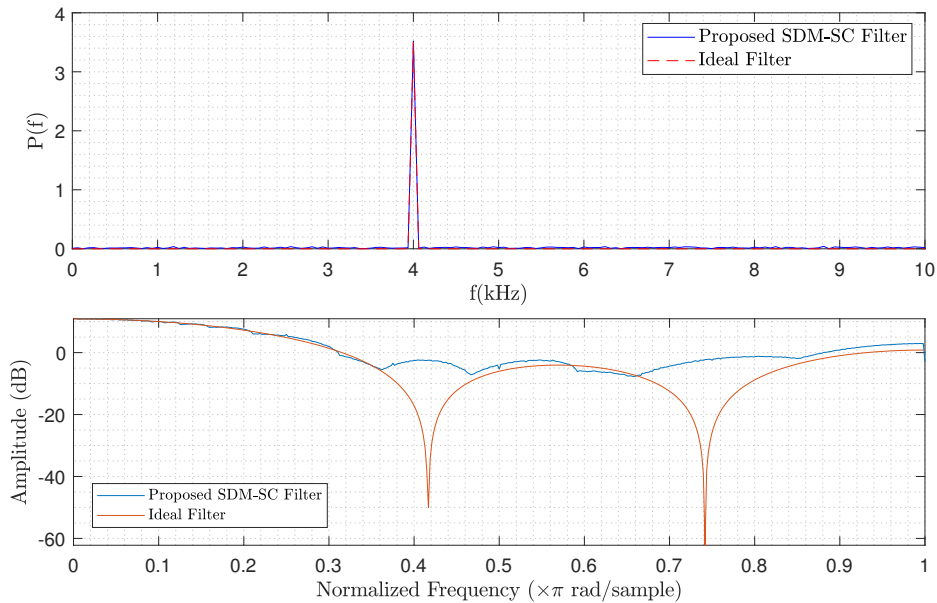
Για να προσομοιώσουμε την προτεινόμενη αρχιτεκτονική θεωρήσαμε ημιτονοειδές σήμα εισόδου $u[n] = \sin(2\pi f_B n)$, όπου $f_B = 4\text{kHz}$ και $OSR = 256$. Επιπλέον θεωρούμε ένα 4^{ης} τάξης FIR φίλτρο και τα βάρη του επιλέγονται να έχουν τις τιμές $w_0 = w_4 = 0.7$, $w_1 = w_3 = 0.6$, $w_2 = 0.9$.

Προφανώς, η επιλογή του μήκους της ακολουθίας $N = 2^k$ παίζει σημαντικό ρόλο στην ποιότητα του σήματος εξόδου, αφού σχετίζεται άμεσα με 1) τον αριθμό των δειγμάτων που λαμβάνονται υπόψιν στον υπολογισμό της εξόδου $z[n]$ και 2) στην ακρίβεια των παραγόμενων SNs. Επομένως, αύξηση στην τιμή του k και συνεπώς στην τιμή του N οδηγεί σε καλύτερη απόδοση. Η τιμή του N επιλέχτηκε να είναι $N = 2^{15}$.

f_B	OSR	N	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
4 kHz	256	2^{15}	0.7	0.6	0.9	0.6	0.7

Πίνακας 5.1: Παράμετροι προσομοίωσης

Για να ερευνήσουμε την επίδοση της προτεινόμενης αρχιτεκτονικής στο πεδίο της συχνότητας, εκτελέσαμε φασματική ανάλυση στο σήμα εξόδου του φίλτρου. Στην εικόνα 5.8 παρουσιάζεται η σύγκριση του μονόπλευρου φάσματος εξόδου καθώς και της απόκρισης συχνότητας του προτεινόμενου MOD1-SC σχήματος και του συνηθισμένου δυαδικού.



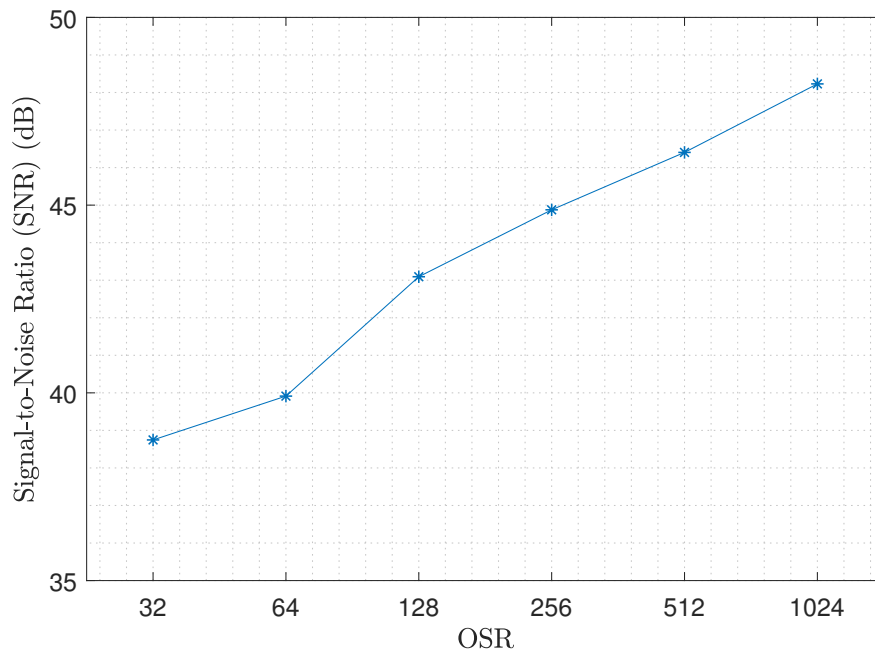
Εικόνα 5.8: Σύγκριση του φάσματος (πάνω) και της απόκρισης συχνότητας (κάτω) μεταξύ του προτεινόμενου MOD1-SC σχήματος και της συνηθισμένης δυαδικής υλοποίησης.

Παρατηρούμε ότι η θεμελιώδης αρμονική του προτεινόμενου σχήματος συμπίπτει με αυτή της δυαδικής υλοποίησης στα 4 kHz, που είναι η συχνότητα εισόδου. Επιπλέον, το πλάτος του

υπολογίζεται ότι είναι 3.4837, τιμή πολύ κοντά στην θεωρητικά αναμενόμενη τιμή που είναι $\sum_{i=0}^4 w_i = 3.5$.

Όσον αφορά την απόκριση συχνότητας, η απόκριση της προτεινόμενης αρχιτεκτονικής ακολουθεί αυτή της δυαδικής υλοποίησης και πετυχαίνει σωστή συχνότητα γονάτου ω_{-3dB} .

Στη συνέχεια, μελετάμε το πώς επηρεάζει το OSR την επίδοση της προτεινόμενης αρχιτεκτονικής, υπολογίζοντας τον σηματοθρομβικό λόγο (Signal-to-Noise Ratio SNR) για τιμές του OSR διαδοχικές αυξανόμενες δυνάμεις του 2. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην εικόνα 5.9. Όπως φαίνεται, αύξηση του OSR οδηγεί σε βελτίωση του SNR, και για $OSR = 1024$ επιτυγχάνεται $SNR \approx 48dB$. Για την αντίστοιχη δυαδική υλοποίηση, το SNR είναι 97.21 dB, λαμβάνοντας υπόψιν τον θόρυβο στρογγυλοποίησης στα βάρη του φίλτρου και στο σήμα εισόδου, για ακρίβεια $k = 15$ bits.



Εικόνα 5.9: Επίδοση του προτεινόμενου MOD1-SC σχήματος αναφορικά με το SNR για επιλεγμένες τιμές του OSR.

Τέλος, για να δώσουμε έμφαση στην χαμηλή κατανάλωση επιφάνειας και υλικού της προτεινόμενης αρχιτεκτονικής, συγκρίνουμε την υλοποίηση του προτεινόμενου σχήματος και του συνηθισμένου δυαδικού φίλτρου, σε συσκευή προσομοίωσης Kintex-7 KC705. Και πάλι θεωρούμε ακρίβεια $k = 15$ για το σήμα εισόδου $u[n]$, για τα βάρη του φίλτρου w_i και για το μέγεθος του LFSR. Επιπλέον, το OSR είναι $OSR = 256$.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 5.2. Όπως ήταν αναμενόμενο, η προτεινόμενη αρχιτεκτονική καταλαμβάνει αμελητέα επιφάνεια, συγκεκριμένα 28 LUTs και 35 καταχωρητές, σε σύγκριση με τη συμβατική δυαδική υλοποίηση που απαιτεί 698 LUTs και 60 καταχωρητές. Αυτό το γεγονός οφείλεται στην αντικατάσταση των δυαδικών πολλαπλασιαστών με πύλες

XNOR. Ταυτόχρονα, η προτεινόμενη αρχιτεκτονική διατηρεί την ίδια μέγιστη συχνότητα λειτουργίας στα 667 MHz.

	SDM-SC Filter	Conv. Filter
Max Operating Frequency (MHz)	667	667
Slice LUTs [Used / Util.]	29 / 0.01%	698 / 0.34%
Slice Registers [Used / Util.]	35 / 0.01%	60 / 0.02%

Πίνακας 5.2: Σύγκριση υλοποίησης σε FPGA μεταξύ της MOD1-SC και της συνηθισμένης δυαδικής υλοποίησης.

6. Επίλογος - Μελλοντικές Προεκτάσεις

Στόχος της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας ήταν η μαθηματική μελέτη των ΣΔ Διαμορφωτών και η παρουσίαση εφαρμογών αυτών στη σύνθεση συχνότητας και στο αποδοτικό ψηφιακό φιλτράρισμα.

Αφού παρουσιάστηκαν οι βασικές πληροφορίες για τους ΣΔ Διαμορφωτές, προχωρήσαμε στην μαθηματική μελέτη αυτών. Συγκεκριμένα, μελετήθηκε η δυναμική των ΣΔ Διαμορφωτών 1^{ης} τάξης υπό τον πρίσμα των απεικονίσεων με ένα σημείο ασυνέχειας και εξήχθησαν συμπεράσματα για την ευστάθεια και την περιοδικότητα αυτών. Στη συνέχεια μελετήθηκαν οι ΣΔ Διαμορφωτές υψηλότερης τάξης, εξήχθησαν οι σχέσεις που περιγράφουν τη δυναμική τους και αναφέρθηκαν συμπεράσματα για την ευστάθεια και την περιοδικότητα σε διαμορφωτές 2^{ης} και 3^{ης} τάξης. Παρόμοια μελέτη διεξήχθη και για διαμορφωτές ανάδρασης σφάλματος.

Επειτα, παρουσιάσαμε πώς οι ΣΔ Διαμορφωτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη σύνθεση συχνότητας με χρήση PLL, δείξαμε το πρόβλημα των spurs που παρουσιάζουν οι ΣΔ Διαμορφωτές ως σύστημα πεπερασμένων καταστάσεων και παρουσιάσαμε τεχνικές για την εξάλειψη αυτών.

Τέλος, παρουσιάστηκε ένα σχήμα DSP που βασίζεται σε ΣΔ Διαμορφωτές και τεχνικές Stochastic Computing. Συγκεκριμένα, δείξαμε ότι η κωδικοποίηση ενός multi-bit σήματος σε 1-bit μέσω ενός ΣΔ Διαμορφωτή επιτρέπει τη χρήση τεχνικών SC ώστε να επωφεληθούμε στο φιλτράρισμα από τη χαμηλή κατανάλωση επιφάνειας αυτών. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που διεξάγαμε επιβεβαιώνουν την ορθή λειτουργία της προτεινόμενης αρχιτεκτονικής και τη χαμηλή κατανάλωση επιφάνεια αυτής.

Στις μελλοντικές προεκτάσεις αυτής της εργασίας περιλαμβάνονται η εξαγωγή γενικότερων αποτελεσμάτων για ΣΔ Διαμορφωτές υψηλότερης τάξης με χρήση ισχυρών μαθηματικών εργαλείων από τη Θεωρία Συστημάτων και την Εργοδική Θεωρία, καθώς και η επέκταση του προτεινόμενου σχήματος DSP και για φίλτρα με ανάδραση (IIR).

Βιβλιογραφία

- [1] K. Hosseini and M. P. Kennedy, “Maximum sequence length mash digital delta–sigma modulators,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 54, no. 12, pp. 2628–2638, 2007.
- [2] H. Ichihara, S. Ishii, D. Sunamori, T. Iwagaki, and T. Inoue, “Compact and accurate stochastic circuits with shared random number sources,” in *2014 IEEE 32nd International Conference on Computer Design (ICCD)*, Seoul, South Korea, 2014, pp. 361–366.
- [3] R. Schreier, G. C. Temes *et al.*, *Understanding delta-sigma data converters*. IEEE press Piscataway, NJ, 2005, vol. 74.
- [4] S. Ardalan and J. Paulos, “An analysis of nonlinear behavior in delta-sigma modulators,” *IEEE Transactions on circuits and systems*, vol. 34, no. 6, pp. 593–603, 1987.
- [5] P. P. Sotiriadis, “Single-bit all-digital frequency synthesis using homodyne sigma-delta modulation,” *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 64, no. 2, pp. 463–474, 2016.
- [6] L. Risbo, “ Σ - Δ modulators - stability analysis and optimization,” Ph.D. dissertation, Technical University of Denmark, Feb. 1995.
- [7] J. P. Keener, “Chaotic behavior in piecewise continuous difference equations,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 261, no. 2, pp. 589–604, 1980.
- [8] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
- [9] D. L. Cohn, *Measure theory*. Springer, 2013.
- [10] A. Denjoy, “Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore,” *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 11, pp. 333–376, 1932.
- [11] R. Gray, “Oversampled sigma-delta modulation,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 35, no. 5, pp. 481–489, 1987.
- [12] K. E. Petersen, *Ergodic theory*. Cambridge University Press, 1989, vol. 2.

- [13] V. Friedman, "The structure of the limit cycles in sigma delta modulation," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 36, no. 8, pp. 972–979, 1988.
- [14] O. Feely and L. O. Chua, "The effect of integrator leak in sigma-delta modulation," *IEEE Transactions on circuits and systems*, vol. 38, no. 11, pp. 1293–1305, 1991.
- [15] O. Feely, "Nonlinear dynamics of chaotic double-loop sigma-delta modulation," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 6, London, UK, 1994, pp. 101–104 vol.6.
- [16] M. P. Kennedy, K. R. Krieg, and L. O. Chua, "The devil's staircase: the electrical engineer's fractal," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 36, no. 8, pp. 1113–1139, 1989.
- [17] D. L. Etheridge and J. Rodriguez, "Periodic solutions of nonlinear discrete-time," *Applicable Analysis*, vol. 62, no. 1-2, pp. 119–137, 1996.
- [18] D. Maroncelli and J. Rodríguez, "Periodic behaviour of nonlinear, second-order discrete dynamical systems," *Journal of Difference Equations and Applications*, vol. 22, no. 2, pp. 280–294, 2016.
- [19] J. R. Munkres, *Topology; a First Course*. Prentice-Hall, 1974.
- [20] L. J. Cromme and I. Diener, "Fixed point theorems for discontinuous mapping," *Mathematical Programming*, vol. 51, no. 1, pp. 257–267, 1991.
- [21] R. Schreier, G. C. Temes, and S. R. Norsworthy, *Delta-sigma data converters: theory, design, and simulation*. IEEE press, 1996.
- [22] S. Hein and A. Zakhor, "On the stability of sigma delta modulators," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 7, pp. 2322–2348, 1993.
- [23] R. Farrell and O. Feely, "Bounding the integrator outputs of second-order sigma-delta modulators," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 45, no. 6, pp. 691–702, 1998.
- [24] S. C. Pinault and P. Lopresti, "On the behavior of the double-loop sigma-delta modulator," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 40, no. 8, pp. 467–479, 1993.
- [25] H. Wang, "On the stability of third-order sigma-delta modulation," in *1993 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Chicago, Illinois, USA, 1993, pp. 1377–1380.
- [26] K. Hosseini and M. Kennedy, "Mathematical analysis of digital mash delta-sigma modulators for fractional-n frequency synthesizers," in *2006 Ph. D. Research in Microelectronics and Electronics*, Otranto (Lecce), Italy, 2006, pp. 309–312.

- [27] B. Fitzgibbon and M. P. Kennedy, “Calculation of cycle lengths in higher order error feedback modulators with constant inputs,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 58, no. 1, pp. 6–10, 2011.
- [28] —, “Calculation of cycle lengths in higher-order mash ddsms with constant inputs,” in *2010 17th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems*, Athens, Greece, 2010, pp. 479–482.
- [29] R. M. Gray, W. Chou, and P. W. Wong, “Quantization noise in single-loop sigma-delta modulation with sinusoidal inputs,” *IEEE Transactions on communications*, vol. 37, no. 9, pp. 956–968, 1989.
- [30] W. Chou, P. W. Wong, and R. M. Gray, “Multistage sigma-delta modulation,” *IEEE Transactions on Information theory*, vol. 35, no. 4, pp. 784–796, 1989.
- [31] M. Kozak and I. Kale, “Rigorous analysis of delta-sigma modulators for fractional-n pll frequency synthesis,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 51, no. 6, pp. 1148–1162, 2004.
- [32] W. Chou and R. M. Gray, “Dithering and its effects on sigma-delta and multistage sigma-delta modulation,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 37, no. 3, pp. 500–513, 1991.
- [33] W. Chou, “Sigma delta and multi-stage sigma delta modulation with inside loop dithering,” in *1991 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Toronto, ON, Canada, 1991, pp. 1953–1956.
- [34] S. Pamarti, J. Welz, and I. Galton, “Statistics of the quantization noise in 1-bit dithered single-quantizer digital delta–sigma modulators,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 54, no. 3, pp. 492–503, 2007.
- [35] S. Pamarti and I. Galton, “Lsb dithering in mash delta–sigma d/a converters,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 54, no. 4, pp. 779–790, 2007.
- [36] R. M. Gray, “Spectral analysis of quantization noise in a single-loop sigma-delta modulator with dc input,” *IEEE Transactions on communications*, vol. 37, no. 6, pp. 588–599, 1989.
- [37] H. Bohr, *Almost periodic functions*. Courier Dover Publications, 2018.
- [38] P. W. Wong and R. M. Gray, “Two-stage sigma-delta modulation,” *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, vol. 38, no. 11, pp. 1937–1952, 1990.
- [39] K. Hosseini and M. P. Kennedy, “Mathematical analysis of a prime modulus quantizer mash digital delta–sigma modulator,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 54, no. 12, pp. 1105–1109, 2007.

- [40] A. Alaghi, W. Qian, and J. P. Hayes, “The promise and challenge of stochastic computing,” *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 37, no. 8, pp. 1515–1531, 2017.
- [41] B. R. Gaines, “Stochastic computing systems,” in *Advances in information systems science*. Springer, 1969, pp. 37–172.
- [42] Y. Liu, S. Liu, Y. Wang, F. Lombardi, and J. Han, “A survey of stochastic computing neural networks for machine learning applications,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020.
- [43] P. Li, D. J. Lilja, W. Qian, K. Bazargan, and M. D. Riedel, “Computation on stochastic bit streams digital image processing case studies,” *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, vol. 22, no. 3, pp. 449–462, 2013.
- [44] Y.-N. Chang and K. K. Parhi, “Architectures for digital filters using stochastic computing,” in *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. IEEE, 2013, pp. 2697–2701.
- [45] Y. Liu and K. K. Parhi, “Architectures for recursive digital filters using stochastic computing,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, no. 14, pp. 3705–3718, 2016.
- [46] H. Ichihara, T. Sugino, S. Ishii, T. Iwagaki, and T. Inoue, “Compact and accurate digital filters based on stochastic computing,” *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing*, vol. 7, no. 1, pp. 31–43, 2016.
- [47] M. Alawad and M. Lin, “Fir filter based on stochastic computing with reconfigurable digital fabric,” in *2015 IEEE 23rd Annual International Symposium on Field-Programmable Custom Computing Machines*. Vancouver, BC, Canada, 2015, pp. 92–95.
- [48] N. Saraf, K. Bazargan, D. J. Lilja, and M. D. Riedel, “Iir filters using stochastic arithmetic,” in *2014 Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition (DATE)*. Dresden, Germany, 2014, pp. 1–6.
- [49] A. Vlachos, N. Temenos, and P. P. Sotiriadis, “Exploring the effectiveness of sigma-delta modulator in stochastic computing-based fir filtering,” in *IEEE International Conference on Modern Circuits and Systems Technologies (MOCAST)*, Thessaloniki, Greece, 2021.
- [50] S. W. Golomb, *Shift register sequences: secure and limited-access code generators, efficiency code generators, prescribed property generators, mathematical models*. World Scientific, 2017.
- [51] U. Meyer-Baese and U. Meyer-Baese, *Digital signal processing with field programmable gate arrays*. Springer, 2007, vol. 65.

- [52] M. H. Najafi, D. Jenson, D. J. Lilja, and M. D. Riedel, “Performing stochastic computation deterministically,” *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, vol. 27, no. 12, pp. 2925–2938, 2019.
- [53] N. Temenos and P. P. Sotiriadis, “Deterministic finite state machines for stochastic division in unipolar format,” in *2020 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, Sevilla, Spain, 2020, pp. 1–5.