Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Μείκτης Διακοπτικού Τύπου με Ενσωματωμένο Ψηφιακό Συνθέτη Συχνοτήτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Νικόλαου Γ. Σταματόπουλου

Επιβλέπων: Παύλος-Πέτρος Σωτηριάδης, Επ. Καθ. Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2016

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Μείκτης Διακοπτικού Τύπου με Ενσωματωμένο Ψηφιακό Συνθέτη Συχνοτήτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Νικόλαου Γ. Σταματόπουλου

Επιβλέπων: Παύλος-Πέτρος Σωτηριάδης, Επ. Καθ. Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 17η Μαρτίου 2016.

....	....	....
Π. Σωτηριάδης	Ι. Παπανάνος	Κ. Πεκμεστζή
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2016

. . . .

Νικόλαος Γ. Σταματόπουλος
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Το ενδιαφέρον για αμιγώς ψηφιακές αρχιτεκτονικές έχει παρουσιάσει αύξηση τα τελευταία χρόνια στη βιομηχανία των τηλεπικοινωνιακών ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η αναλογική σχεδίαση είναι συνήθως πιο δύσκολη, απαιτεί περισσότερο χρόνο, και έχει μεγαλύτερο κόστος κατά την κατασκευή, ενώ τα ψηφιακά ολοκληρωμένα κυκλώματα έχουν ως πλεονεκτήματα την φορητότητα, την εύκολη παραμετροποίηση και τον αυτοματοποιημένο έλεγχο.

Στην παρούσα διπλωματική παρουσιάζεται μία αρχιτεκτονική μείκτη διακοπτικού τύπου, η θύρα LO του οποίου οδηγείται απευθείας από ενσωματωμένο συνθέτη συχνοτήτων (*frequency synthesizer*), και λόγω αυτής της φιλοσοφίας σχεδίασης, προσφέρει τα πλεονεκτήματα που προαναφέρθηκαν. Οι μείκτες διακοπτικού τύπου είναι δημοφιλείς σε σχεδιάσεις με διακριτά στοιχεία και έχουν υλοποιηθεί σε ολοκληρωμένα κυκλώματα. Ωστόσο, συνήθως οδηγούνται από κλασσικά PLL ή αρκετά περίπλοκους συνθέτες συχνότητας. Ο μείκτης που μελετάται στην παρούσα διπλωματική εργασία βασίζεται σε πύλες μετάδοσης που οδηγούνται από το frequency synthesizer, εφαρμόζοντας και κάποιες τεχνικές dithering για την μετατροπή των ανεπιθύμητων συχνοτικών συνιστωσών της εξόδου του σε ένα συνεχές κατώφλι θορύβου.

Στο Κεφάλαιο 1 διερευνάται θεωρητικά η ψηφιακή σύνθεση συχνότητας με ένα bit, με χρήση dithering. Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζεται ένας απλός διακοπτικός μείκτης οδηγούμενος από ενσωματωμένο frequency synthesizer ενός bit που υλοποιεί τις τεχνικές dithering του προηγούμενου κεφαλαίου. Τέλος, στο Κεφάλαιο 3, παρουσιάζεται μία ιδέα για επέκταση σε περισσότερα του ενός bits, βασιζόμενη σε διακοπτόμενους πυκνωτές.

Λέξεις-κλειδιά

Μείκτης, ψηφιακή σύνθεση συχνότητας, dithering, διακοπτόμενοι πυκνωτές

Abstract

There has been an increasing interest in all-digital architectures in the RFIC industry over the past few years, mainly due to the higher challenge in the design and the extra cost of fabrication of RF analog and mixed-signal ICs versus standard digital ones in modern nano-scale IC technologies. Digital circuit designs offer the advantages of portability, re-configurability, automated checking and verification.

This thesis proposes a switching RF downconverting mixer whose Local Oscillator (LO) input is driven by an embedded all-digital frequency synthesizer, offering some of the aforementioned advantages compared to traditional analog mixer architectures. Switching mixers are popular blocks in discrete-component designs and have been implemented in RFICs. However, they are typically driven by classical PLLs or complex mixed-signal frequency synthesizers. The mixer architecture discussed in this thesis is based on digital transmission gates which are driven directly by the output stream of the embedded all-digital frequency synthesizer. Certain dithering techniques are also used to make the synthesizer's spectrum sinewave-like and convert spurs to continuous noise floor.

Chapter 1 discusses the theory behind 1-bit frequency synthesis using the optimal dithering sequence to eliminate spurs. Chapter 2 presents a simple switching mixer driven by an embedded single-bit frequency synthesizer with dithering. Finally, Chapter 3 presents a multi-bit switching multiplier/mixer using switched capacitors.

Keywords

Mixer, digital frequency synthesis, dithering, switched capacitors

Πρόλογος – Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι το αποτέλεσμα της πολύ επιτυχημένης συνεργασίας μου με ανθρώπους του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα και σύμβουλο καθηγητή μου, **Παύλο-Πέτρο Σωτηριάδη**, για τις πολύτιμες γνώσεις που μού χάρισε κατά τις αμέτρητες τεχνικές συζητήσεις μας. Πέρα από την καθοδήγησή του, καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας, έδειξε ενδιαφέρον για τα προβλήματα που προέκυψαν και προσπάθησε να εξασφαλίσει τις καλύτερες δυνατές συνθήκες ώστε να ολοκληρώσω την εργασία μου.

Επίσης, ευχαριστώ πολύ τον καθηγητή **Ιωάννη Παπανάνο**, που με ενέπνευσε στο αντικείμενο της ηλεκτρονικής από την αρχή σχεδόν των σπουδών μου. Πολύ σημαντική ήταν επίσης η καθοδήγηση που μού παρείχαν σε τεχνικά ζητήματα οι υποψήφιοι διδακτόρες, **Βαγγέλης Τσιμπινός**, **Κώστας Γαλανόπουλος**, **Χάρης Μπασέτας** και **Νεοκλής Χατζηγεωργίου**.

Ιδιαίτερη μνεία αξίζει στους γονείς μου και τη σύντροφό μου, για την αμέριστη βοήθειά τους, ενώ δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω τους φίλους και συναδέλφους μου, **Ηλία Αλευρά**, **Νίκο Ανδρουλάκη**, **Φώτη Ηλιόπουλο**, **Φαίη Καζάκου**, **Σάκη Καραγιάννη**, **Χάρη Κοντούλη**, **Παναγιώτη Μαρινάκη**, **Μαρία Παπαμιχάλη**, **Ελένη Τσακιράκη**, **Αιμίλιο Τσουβελεκάκη**, και **Γιώργο Φουστούκο**, που ανέχθηκαν τις ιδιαιτερότητές μου και ήταν πάντοτε στο πλευρό μου.

Περιεχόμενα

Πίνακας συντομογραφιών

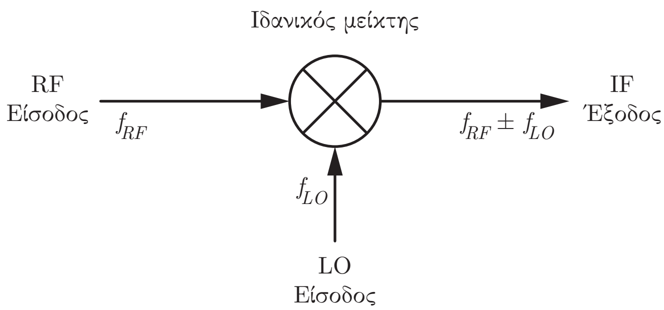
CDF	Cumulative Density Function (Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής)
DAC	Digital-to-Analog Converter (Μετατροπέας Ψηφιακού σε Αναλογικό)
DDS	Direct Digital Synthesizer
DTFT	Discrete-Time Fourier Transform
IID	Independent & Identically Distributed (Ανεξάρτητες & Ταυτόνομα Κατανεμημένες)
LUT	Look-Up Table
PSD	Power Spectral Density (Πυκνότητα Φασματικής Ισχύος)
ZOH	Zero-Order Hold

Εισαγωγή & σκοπός της εργασίας

Ορισμοί

Ένας RF μείκτης, όπως αυτός του Σχ. 1, είναι ένα ενεργό ή παθητικό στοιχείο που έχει στόχο τη μετατροπή ενός σήματος από μία συχνότητα σε κάποια άλλη. Διαθέτει τρεις θύρες: την είσοδο RF (*radio frequency*), την LO (*local oscillator*) και την IF (*intermediate frequency*).

Ένας ιδανικός μείκτης λαμβάνει ένα σήμα RF συχνότητα f_{RF}, πραγματοποιεί τη μείξη με ένα σήμα LO συχνότητας f_{LO} και παράγει ένα σήμα εξόδου IF που αποτελείται από το άθροισμα και τη διαφορά των δύο συχνοτήτων, δηλαδή $f_{RF} \pm f_{LO}$. Στη συνέχεια, το σήμα αυτό οδηγείται σε κάποιο αναλογικό φίλτρο ώστε να επιλεγεί μία από τις δύο συχνότητες.



Σχήμα 1: Διαδικασία μείξης σε ιδανικό μείκτη.

Όταν επιλέγουμε ως IF τη διαφορά $f_{RF} - f_{LO}$, ο μείκτης καλείται *downconverter* και χρησιμοποιείται συνήθως σε δέκτες. Στην αντίθετη περίπτωση, όπου επιλέγουμε το άθροισμα, καλείται *upconverter* και χρησιμοποιείται συνήθως σε πομπούς.

Ένας μείκτης μπορεί να υλοποιηθεί με πολλούς τρόπους. Ωστόσο, όλα τα κυκλώματα που υλοποιούν μείξη μπορούν να θεωρηθούν ουσιαστικά ως πολλαπλασιαστές επειδή παράγουν στην έξοδο ένα σήμα που είναι, κατά κάποιον τρόπο, το γινόμενο των δύο εισόδων του.

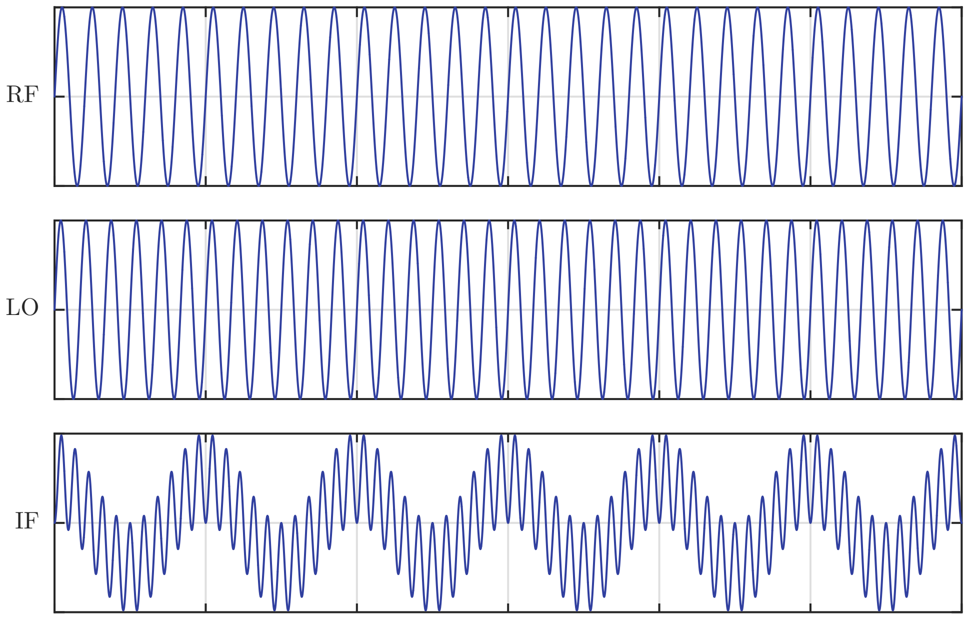
Παρακάτω παρουσιάζονται συνοπτικά μερικές κλασσικές τοπολογίες μεικτών που είναι γνωστές.

Αναλογικός πολλαπλασιαστής

Ένας πολύ απλοποιημένος RF μείκτης έχει τη μορφή ενός αναλογικού πολλαπλασιαστή, που, ιδανικά, δεν έχει θόρυβο και παρουσιάζει καθ' όλα γραμμική συμπεριφορά. Η έξοδός του είναι τότε απλώς ο πολλαπλασιασμός των δύο σημάτων εισόδου:

$$\sin(\omega_{RF}t)\sin(\omega_{LO}t) = \frac{1}{2}\left[\cos(\omega_{RF}+\omega_{LO})t + \cos(\omega_{RF}-\omega_{LO})t\right] \tag{1}$$

Η πράξη αυτή φαίνεται, στο πεδίο του χρόνου, στο Σχ. 2.

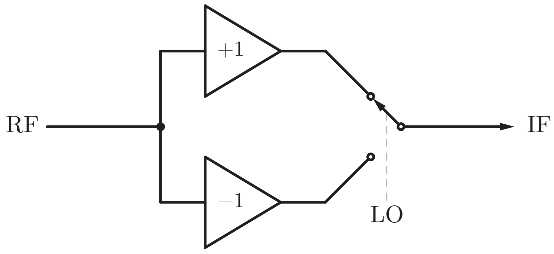


Σχήμα 2: Σήματα ενός ιδανικού αναλογικού πολλαπλασιαστή ως μείκτη.

Είναι προφανές ότι, στο πεδίο της συχνότητας, θα υφίστανται μόνο δύο κρουστικές συναρτήσεις στις συχνότητες $f_{RF} \pm f_{LO}$.

Διακοπτικός μείκτης

Στο Σχ. 3 φαίνεται ένας μείκτης που διαλέγει μέσω ενός διακόπτη αν θα οδηγηθεί στην έξοδο το σήμα RF με φάση 0° ή 180° [1]. Ο διακόπτης ελέγχεται από το σήμα LO που έχει τη μορφή τετραγωνικού παλμού.



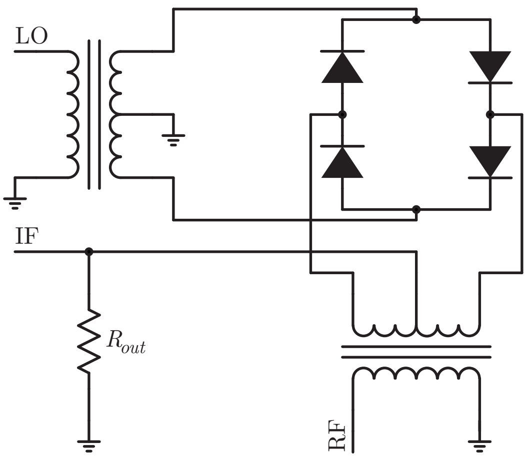
Σχήμα 3: Ιδανικός διακοπτικός μείκτης.

Αν και η ιδέα είναι ιδιαίτερα απλή, το φάσμα του σήματος IF μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκο, λόγω της φύσεως του τετραγωνικού παλμού που οδηγεί το διακόπτη.

Παρόμοιες με αυτή τοπολογίες μείκτη θα μελετηθούν διεξοδικά στην παρούσα διπλωματική.

Μείκτης με διόδους σε τοπολογία δακτυλιδιού (diode ring)

Ο μείκτης με διόδους σε τοπολογία δακτυλιδιού ήταν για πολλά χρόνια η προτιμώμενη τοπολογία για υψηλή απόδοση. Μία μορφή του φαίνεται στο Σχ. 4.

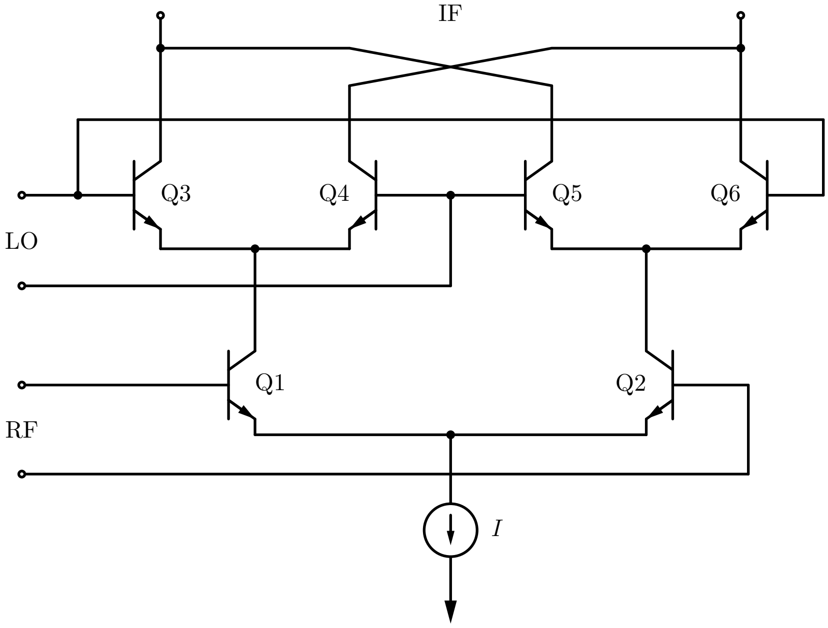


Σχήμα 4: Μείκτης με διόδους σε τοπολογία δακτυλιδιού.

Στην τοπολογία δακτυλιδιού οι δίοδοι λειτουργούν ως διακόπτες, που ελέγχονται από το LO σήμα. Εξαιτίας της μη γραμμικής φύσεως των διόδων, το ταίριασμα της εμπέδησης στις τρεις θύρες είναι δύσκολο. Επίσης, η ισχύς του LO πρέπει να είναι αρκετά υψηλή για να εξασφαλιστεί ότι οι δίοδοι άγουν επαρκώς. Αυτό, σε συνδυασμό με την έντονη σύζευξη που παρατηρείται μεταξύ των θυρών, συνεπάγεται ότι θα εμφανίζεται κάποια συνιστώσα του LO, με αρκετή παραμόρφωση, στην θύρα RF, πράγμα μη επιθυμητό.

Ενεργοί μείκτες

Ενεργοί καλούνται οι μείκτες που καταναλώνουν dc ρεύμα για τη λειτουργία τους. Συχνά προτιμώνται σε σχέση με τους παθητικούς γιατί παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις, κυρίως ως προς το κέρδος μετατροπής (conversion gain), το οποίο ελαχιστοποιεί τη συνεισφορά του μείκτη στο συνολικό θόρυβο του συστήματος [2]. Ένας τέτοιος μείκτης σε πλήρως διαφορική μορφή είναι ο μείκτης Gilbert που φαίνεται στο Σχ. 5.



Σχήμα 5: Πλήρως διαφορικός μείκτης Gilbert.

Οι ενεργοί μείκτες μπορούν να υλοποιηθούν ως ολοκληρωμένα κυκλώματα σε σύγχρονες τεχνολογίες, προσφέρουν κέρδος μετατροπής, απαιτούν λιγότερη ισχύ για την οδήγηση της θύρας LO και παρουσιάζουν καλύτερη απομόνωση μεταξύ των θυρών.

Σκοπός της εργασίας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, μελετάται η τοπολογία διακοπτικού μείκτη. Το σήμα LO παρέχεται από έναν ενσωματωμένο ψηφιακό συνθέτη συχνοτήτων, εφαρμόζοντας και κάποιες τεχνικές dithering για την μετατροπή των ανεπιθύμητων συχνοτικών συνιστωσών της εξόδου του σε ένα συνεχές κατώφλι θορύβου. Σκοπός είναι η επίτευξη καλών επιδόσεων, σε συνδυασμό με όλες τις ευκολίες που παρουσιάζει στη σχεδίασή του ένα πλήρως ψηφιακό κύκλωμα (όπως, φορητότητα, εύκολη παραμετροποίηση, αυτοματοποιημένος έλεγχος).

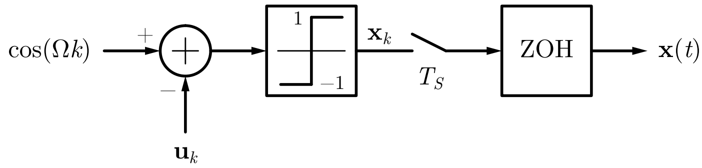
Κεφάλαιο 1

Ψηφιακή σύνθεση συχνότητας ενός bit με dithering

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε την αμιγώς ψηφιακή σύνθεση συχνότητας που βασίζεται στην κβάντιση ενός ημιτόνου, σε ένα bit, στο ρυθμό Nyquist, χρησιμοποιώντας dithering πλάτους.

1.1 Ορισμοί

Τυχαίο dithering χρησιμοποιείται συχνά σε DDS [3] και μετατροπείς δεδομένων [4] για την εξάλειψη των ανεπιθύμητων συχνοτικών συνιστωσών (*spurs*) και για τη διαμόρφωση του θορύβου κβάντισης. Εδώ, θα εξετάσουμε την περίπτωση ενός DDS με έξοδο ενός bit, χωρίς υπερδειγματοληψία, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.1.



Σχήμα 1.1: Κβάντιση ημιτόνου σε ένα bit, με dithering.

Το ημιτονοειδές σήμα μπορεί να παραχθεί μέσω ενός συσσωρευτή φάσης (*phase accumulator*) και ενός LUT. Το ZOH παράγει μία ψηφιακή κυματομορφή ενός bit σε συνεχή χρόνο. Όλα τα μπλοκ είναι χρονισμένα σε ένα ρολόι αναφοράς συχνότητας $f_S = 1/T_S$.

Η τυχαία ακολουθία $\{\mathbf{u}_k\}$ που χρησιμοποιείται ως dithering αφαιρείται από το ημιτονοειδές σήμα, δημιουργώντας το $\mathbf{x}_k = \mathrm{sgn}[\cos(\Omega k) - \mathbf{u}_k]$, ένα διακριτού χρόνου σήμα ενός bit (± 1).

Θεωρούμε ότι η τυχαία ακολουθία $\{\mathbf{u}_k\}$ αποτελείται από ανεξάρτητες και ταυτόνομα κατανεμημένες (IID) μεταβλητές, με συνάρτηση αθροιστικής κατανομής (CDF) $G : [-1, 1] \to [0, 1]$, η οποία είναι συνεχής και έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[-1, 1]$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και $u \in [-1, 1]$ ισχύει $\Pr(\mathbf{u}_k \le u) = G(u)$, άρα υποθέτουμε ότι η $\{\mathbf{u}_k\}$ λαμβάνει ουσιαστικά τιμές μόνο εντός του $[-1, 1]$. Αυτό είναι λογικό διότι η $\cos(\Omega k)$ κάνει το ίδιο, άρα οποιαδήποτε μεγαλύτερη τιμή dithering θα ήταν περιττή.

Επιπλέον, έχει πρακτική σημασία να θεωρήσουμε ότι $\Omega/(2\pi)$ είναι ρητός αριθμός, δηλαδή $\Omega = 2\pi w/q$ για κάποιον ακέραιο w ώστε $0 < w < q/2$. Σε αυτήν την περίπτωση

$$\mathbf{x}_k = \mathrm{sgn}\left[\cos\left(2\pi\frac{kw}{q}\right) - \mathbf{u}_k\right] \tag{1.1}$$

και επειδή η $\{\mathbf{u}_k\}$ είναι μία IID τυχαία ακολουθία και η $\cos(2\pi kw/q)$ έχει περίοδο $q/\gcd(q, w)$, η τυχαία ακολουθία $\{\mathbf{x}_k\}$ είναι περιοδικά στάσιμη (*cyclostationary*) με την ίδια περίοδο. Αφού το q είναι πολλαπλάσιο του $q/\gcd(q, w)$, η $\{\mathbf{x}_k\}$ είναι επίσης περιοδικά στάσιμη με περίοδο q, πράγμα που θα χρησιμοποιήσουμε ακολούθως για απλούστευση.

Μέση αυτοσυσχέτιση περιόδου της $\{x_k\}$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος (PSD) μιας διαδικασίας διακριτού χρόνου, στάσιμης με την ευρεία έννοια, είναι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της συνάρτησης αυτοσυσχέτισής της [5]:

$$r_x(n, m) = E\{\mathbf{x}_n \mathbf{x}_m\} \tag{1.2}$$

Επειδή όμως η $\{\mathbf{x}_k\}$ δεν είναι στάσιμη με την ευρεία έννοια αλλά περιοδικά στάσιμη, η PSD της, $s_x(\omega)$, ορίζεται [5][6] ως ο DTFT της μέσης αυτοσυσχέτισης περιόδου. Δηλαδή,

$$\overline{r}_x(k) = \frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1} r_x(k+m, m) \quad \text{και} \quad s_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{r}_x(k) e^{-ik\omega}. \tag{1.3}$$

Για να υπολογίσουμε την $\overline{r}_x(k)$ εκφράζουμε την CDF $G : [-1, 1] \to [0, 1]$ ως σειρά πολυωνύμων Chebyshev 1ου είδους, δηλαδή,

$$G(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j(u). \tag{1.4}$$

Οι συντελεστές a_j δίνονται από τις σχέσεις [7]:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{G(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u - 1 \qquad\qquad a_{j>0} = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{G(u)T_j(u)}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u \tag{1.5}$$

Επειδή η G είναι συνεχής σύμφωνα με την αρχική μας υπόθεση, το ανάπτυγμά σε σειρά της Εξ. (1.4) συγκλίνει στην G παντού στο $[-1,1]$. Αντίστροφα, η G μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας τους συντελεστές a_j εφ' όσον η σειρά συγκλίνει σε συνεχή συνάρτηση και η G αντιπροσωπεύει πράγματι μία CDF. Θεωρώντας επιπλέον ότι η σειρά (1.5) είναι σε κάθε όρο της διαφορίσιμη, μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να αντιπροσωπεύει η G μία CDF είναι

$$G(-1) = 0, \quad G(1) = 1 \quad \text{και} \quad G'(u) \geq 0 \quad \forall u \in [-1,1] \tag{1.6}$$

Επειδή $T_j(\pm 1) = (\pm 1)^j$, $j = 0,1,2,\ldots$, και $T_j'(u) = jU_{j-1}(u)$, για $j = 1,2,3,\ldots$, όπου U_j είναι το j-οστό πολυώνυμο Chebyshev 2ου είδους [7], οι Εξ. (1.6) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j = -1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j = 1, \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{\infty} j a_j U_{j-1}(u) \geq 0 \quad \forall u \in [-1,1] \tag{1.7}$$

1.2 Φασματική πυκνότητα ισχύος & δυναμικό εύρος

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς, μπορούμε να εκφράσουμε την $\overline{r}_x(k)$ ως συνάρτηση των συντελεστών a_j, $j = 0,1,2,\ldots$. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι η μέση αυτοσυσχέτιση περιόδου $\overline{r}_x(k)$ της $\{\mathbf{x}_k\}$ δίνεται από την Εξ. (1.8) όπου $\delta_0 = 1$ και $\delta_{k\neq 0} = 0$ [8].

$$\overline{r}_x(k) = a_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j^2}{2}\cos\left(\frac{2\pi k j w}{q}\right) + \left(1 - a_0^2 - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j^2}{2}\right)\delta_k \tag{1.8}$$

Παρατηρούμε ότι η $\overline{r}_x$ αποτελείται από τον DC όρο a_0^2, αρμονικές του $\cos(2\pi k w/q)$ και μία κρουστική συνιστώσα για $k = 0$. Επιπλέον, το πλάτος της j-οστής αρμονικής είναι ίσο με το μισό του τετραγώνου του συντελεστή a_j. Παρατηρώντας τις Εξ. (1.5), βλέπουμε ότι επιλέγοντας κατάλληλα την CDF G μπορούμε να διαμορφώσουμε την συνάρτηση μέσης αυτοσυσχέτισης περιόδου, επομένως και την PSD της $\{\mathbf{x}_k\}$. Ας σημειωθεί ωστόσο ότι αναφερόμαστε σε διακριτό χρόνο, συνεπώς οι αρμονικές του $\cos(2\pi k w/q)$ υφίστανται αναδίπλωση στο πεδίο της συχνότητας $\omega \in [0,2\pi]$, λόγω του ότι $\cos(2\pi k j w/q) = \cos\left(2\pi k\left((jw) \bmod q\right)/q\right)$.

1.2.1 Φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος εξόδου

Η έξοδος $x(t)$ του ZOH στο Σχ. 1.1 είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου που μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_k \, p\left(\frac{t}{T_S} - k\right) \tag{1.9}$$

όπου $T_S = 1/f_S$ είναι η περίοδος δειγματοληψίας, και ο παλμός $p(t)$ είναι 1 για $t \in [0,1)$ και 0 αλλού, σύμφωνα με τη λειτουργία του ZOH. Μπορεί να δειχθεί [8] ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος του $x(t)$ είναι

$$S_x(f) = T_S \operatorname{sinc}^2(fT_S)\, s_x(2\pi f T_S) \tag{1.10}$$

όπου s_x είναι ο μετασχηματισμός DTFT της μέσης αυτοσυσχέτισης περιόδου $\overline{r}_x$, ενώ ο όρος $T_S \operatorname{sinc}^2(fT_S)$ οφείλεται στον παλμό $p(t)$.

Έπειτα από κάποια βήματα, και θεωρώντας ότι $\gcd(w,q) = 1$ καταλήγουμε ότι η PSD του $x(t)$ είναι [8]:

$$S_x(f) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{f_S}\right)\Big(S_{HA}(f) + S_N(f) + S_{DC}(f)\Big) \tag{1.11}$$

όπου οι όροι αρμονικών (S_{HA}), θορύβου (S_N) και DC (S_{DC}) δίνονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$S_{HA}(f) = \frac{1}{4}\sum_{h=1}^{\infty} b_h \left[\delta\left(f - \frac{h}{q} f_S\right) + \delta\left(f + \frac{h}{q} f_S\right)\right] \tag{1.12}$$

$$S_N(f) = \frac{1}{f_S}\left(1 - a_0^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\right) \tag{1.13}$$

$$S_{DC}(f) = \frac{b_0 + 3a_0^2}{4}\,\delta(f) \tag{1.14}$$

Για $h = 0, 1, 2, \ldots$, η ισχύς των συνιστωσών στις συχνότητες $\pm(h/q)\, f_S$ της Εξ. (1.12) είναι $b_h/4$, με

$$b_h = \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_{I(h,r)}^2 \tag{1.15}$$

όπου $I(h,r) = |j_1 h + qr|$. Η σταθερά j_1 (μαζί με την k_1 που, όμως, δεν συμμετέχει στην παραπάνω εξίσωση) λαμβάνεται λύνοντας τη Διοφαντική εξίσωση $wj_1 + qk_1 = 1$. Συγκεκριμένα, ο συντελεστής b_w των συνιστωσών στις συχνότητες $\pm(w/q)\, f_S$ είναι

$$b_w = \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_{|1+qr|}^2$$

Εξετάζοντας την Εξ. (1.15), παρατηρούμε ότι η συνεισφορά των συντελεστών a_j στην ολική ισχύ των συνιστωσών $\pm(h/q)\, f_S$ είναι αθροιστική αφού $a^2_{I(h,r)} \geq 0$. Επομένως, για να ελαχιστοποιήσουμε τα ανεπιθύμητα spurs στην έξοδο θα πρέπει να μηδενίσουμε όσο περισσότερους από τους συντελεστές a_j μπορούμε.

Ας σημειωθεί ότι, για να υπολογίσουμε τον συντελεστή b_h, βρίσκουμε πρώτα μία λύση (j_1, k_1) της Διοφαντικής εξίσωσης $wj_1 + qk_1 = 1$. Αυτό είναι πάντα εφικτό λόγω της αρχικής υπόθεσης $\gcd(w, q) = 1$. Οποιαδήποτε (j_1, k_1) από τις άπειρες λύσεις είναι αποδεκτή αλλά αυτή με τα μικρότερα j_1, k_1 διευκολύνει περισσότερο. Έπειτα, εφαρμόζουμε την Εξ. (1.15) όπου, βέβαια, μόνον ο συντελεστής j_1 χρησιμοποιείται στον όρο $|j_1 h + qr|$.

1.2.2 Κατώφλι θορύβου και δυναμικό εύρος

Τυπικά, η επιθυμητή συνιστώσα στην έξοδο εμφανίζεται στη συχνότητα $(w/q)\, f_S$ με πλάτος $\mathrm{sinc}^2(f/f_S)\, b_w/4$. Επίσης, ο θόρυβος, που είναι η μόνη συνιστώσα με συνεχές φάσμα, έχει φασματική πυκνότητα ισχύος $\mathrm{sinc}^2(f/f_S)\, S_N(f)$. Ορίζουμε τώρα το δυναμικό εύρος (*Dynamic Range, DR*) ως το λόγο της ισχύος της επιθυμητής συνιστώσας στην έξοδο προς την PSD του θορύβου, δηλαδή:

$$DR = 10 \log_{10} \left(\frac{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{f_S}\right) \frac{b_w}{4}}{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{f_S}\right) S_N(f)} \right) \tag{1.16}$$

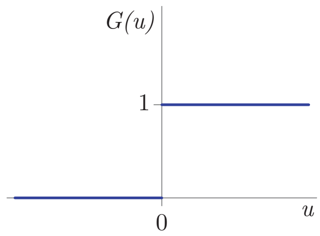
και κατόπιν αντικατάστασης των τιμών των b_w και $S_N(f)$ λαμβάνουμε:

$$DR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty} a^2_{|1+qr|}}{1 - a_0^2 - \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^2} \right) + 10 \log_{10} f_S - 6.02\,\mathrm{dB} \tag{1.17}$$

Ο ορισμός του δυναμικού εύρους μπορεί να χρησιμοποιηθεί φυσικά και για άλλες συνιστώσες, χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο συντελεστή b_h, $h = 0, 1, 2, \ldots$. Επίσης, ας σημειωθεί ότι ο όρος $10 \log_{10} f_S$ είναι αναμενόμενος αφού η ισχύς του σφάλματος κβάντισης κατανέμεται σε εύρος συχνοτήτων ανάλογο της συχνότητας δειγματοληψίας f_S.

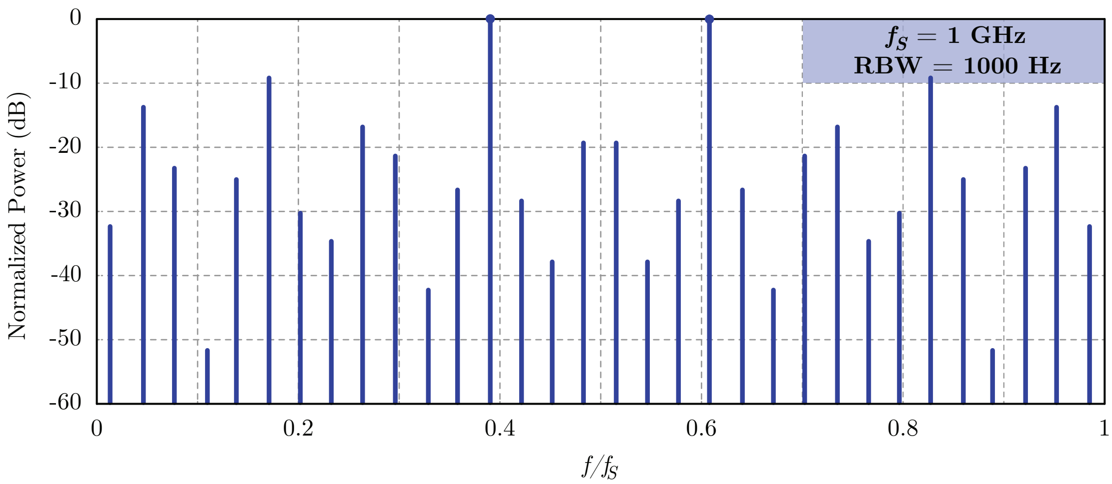
1.3 Παραδείγματα και προσομοιώσεις σε MATLAB

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση κβάντισης σε ένα bit, με $w = 25$ και $q = 64$, χωρίς dithering. Αυτή είναι η οριακή περίπτωση όπου η CDF $G(u)$ είναι 0 για $u \in [-1, 0)$ και 1 για $u \in (0, 1]$, δηλαδή $\mathbf{u}_k = 0$ με πιθανότητα ένα.



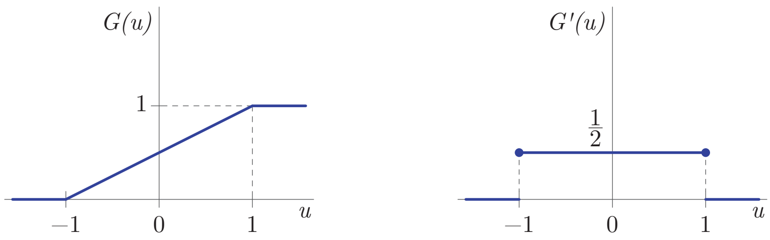
Σχήμα 1.2: Συνάρτηση αθροιστικής κατανομής G για την περίπτωση χωρίς dithering.

Παρ' ότι η G είναι ασυνεχής στο $u = 0$, το ανάπτυγμά της σε σειρά ισχύει για $u \neq 0$, με $a_{2k} = 0$ και $a_{2k+1} = 4(-1)^k/((2k + 1)\pi)$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$. Στο Σχ. 1.3 φαίνεται το φάσμα εξόδου αγνοώντας τον παράγοντα $\mathrm{sinc}^2(f/f_S)$. Το φάσμα είναι αποτέλεσμα προσομοίωσης στο MATLAB και συμφωνεί απόλυτα με τη θεωρία.

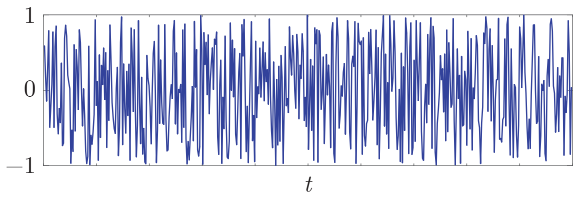


Σχήμα 1.3: Φάσμα ημιτόνου κβαντισμένου σε ένα bit χωρίς dithering, με $w = 25$ και $q = 64$, αγνοώντας τον παράγοντα $\mathrm{sinc}^2(f/f_S)$.

Έπειτα, θεωρούμε την ίδια περίπτωση των $w = 25$ και $q = 64$, αλλά με την ακολουθία dithering $\{\mathbf{u}_k\}$ να αποτελείται από **ομοιόμορφα κατανεμημένες** IID μεταβλητές, δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι σταθερή και ίση με $G'(u) = 1/2$ στο $[-1, 1]$ και η CDF είναι $G(u) = (u + 1)/2$, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.4. Αφού $T_1(u) = u$, λαμβάνουμε $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ και $a_k = 0$ για $k = 2, 3, 4, \ldots$.



(α)



(β)

Σχήμα 1.4: Στατιστικές ιδιότητες (α) και τυχαίο χρονικό στιγμιότυπο (β) του dithering πλάτους.

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές b_h, βρίσκουμε μία λύση της Διοφαντικής εξίσωσης $25j_1 + 64k_1 = 1$, όπως για παράδειγμα $(j_1, k_1) = (-23, 9)$. Για να είναι μη μηδενικοί οι b_h, με $h = 0, 1, 2, \ldots$, πρέπει να υπάρχει κάποιο $r \in \mathbb{Z}$ για το οποίο να ισχύει

$$I(h, r) = |j_1 h + 64r| = 1 \tag{1.18}$$

διότι $a_1 = 1$ και $a_0 = 0$, $a_k = 0$ για κάθε $k = 2, 3, 4, \ldots$, επομένως μόνο το a_1 μπορεί να συνεισφέρει στους b_h. Αφού $25j_1+64k_1 = 1$, μια λύση της $j_1h+64r = 1$ είναι η $(h, r) = (25, k_1)$ και τελικά η γενική λύση της Εξ. (1.18) είναι

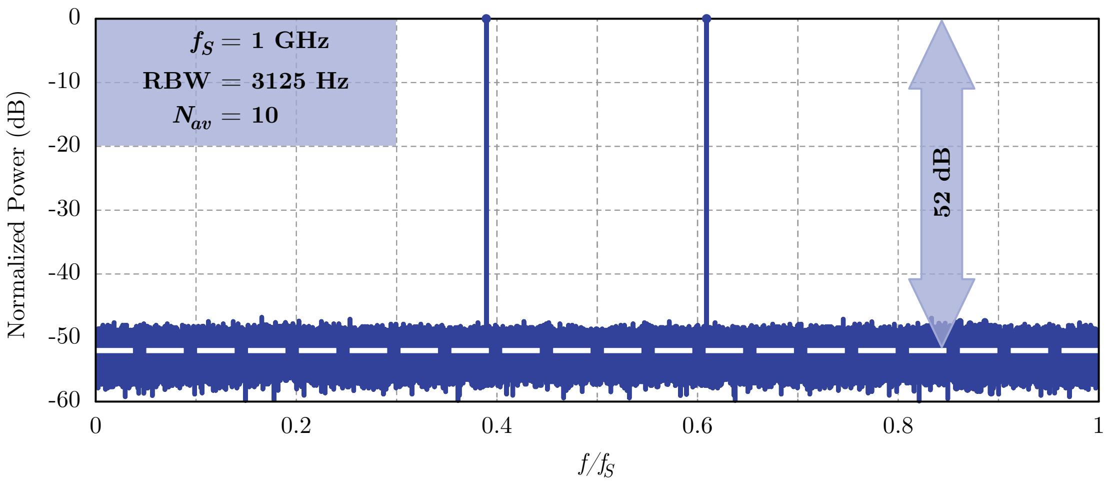
$$(h, r) = \pm(25, 9) + r(64, 23), \qquad r \in \mathbb{Z} \tag{1.19}$$

Αφού $h \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι οι μοναδικοί μη μηδενικοί συντελεστές b_h είναι οι b_{25} και $b_{64n\pm25}$, με $n = 1, 2, 3, \ldots$. Επίσης, από την Εξ. (1.15) λαμβάνουμε ότι $b_{25} = b_{64n\pm25} = 1$, με $n = 1, 2, 3, \ldots$. Συνεπώς,

$$S_{HA}(f) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{h=25,\, 64n\pm25 \\ n=1,2,3,\ldots}} \left[\delta\left(f - \frac{h}{q} f_S\right) + \delta\left(f + \frac{h}{q} f_S\right) \right] \tag{1.20}$$

και $S_N(f) = 1/(2f_S)$, $S_{DC}(f) = 0$. Το αποτέλεσμα συνάδει απόλυτα με την τιμή που λάβαμε από την προσομοίωση, που φαίνεται στο Σχ. 1.5, έχοντας αγνοήσει τον παράγοντα $\text{sinc}^2(f/f_S)$.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν μόνο δύο συνιστώσες στο εύρος συχνοτήτων $[0, f_S]$, με την επιθυμητή να βρίσκεται στην $(25/64)\, f_S$ και το είδωλό της στην $((64 - 25)/64)\, f_S$, εξαιτίας της



Σχήμα 1.5: Φάσμα του κβαντισμένου σε ένα bit ημιτόνου με ομοιόμορφα κατανεμημένο dither, όταν $w = 25$, $q = 64$, αγνοώντας τον παράγοντα $\mathrm{sinc}^2(f/f_S)$. $f_S = 1\,\mathrm{GHz}$, Resolution BW $= 3125\,\mathrm{Hz}$ και averaging $N_{\mathrm{av}} = 10$ επαναλήψεων.

διακριτής φύσεως της $\{\mathbf{x}_k\}$. Το είδωλο δεν μπορεί να εξαλειφθεί χωρίς τη χρήση κάποιου φίλτρου συνεχούς χρόνου. Άλλες ανεπιθύμητες συνιστώσες δεν εμφανίζονται. Επομένως, συμπεραίνουμε πως, όταν χρησιμοποιείται ομοιόμορφη CDF, λαμβάνουμε έξοδο χωρίς ανεπιθύμητες συνιστώσες (*spurs-free*). Αυτό φυσικά ισχύει για κάθε ζεύγος ακεραίων w, q που ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις.

Εφ' όσον $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ και $a_k = 0$ για $k = 2, 3, 4, \ldots$, το δυναμικό εύρος, που ορίζεται από την Εξ. (1.17), απλοποιείται τώρα ως εξής:

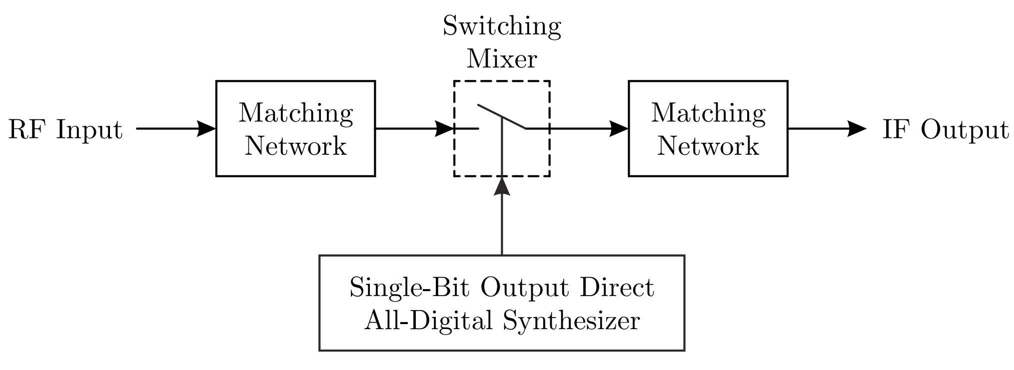
$$DR = 10\log_{10}(f_S) - 3.01\,\mathrm{dB} \tag{1.21}$$

Για $f_S = 1\,\mathrm{GHz}$ λαμβάνουμε $DR \approx 87\,\mathrm{dB}$. Για να λάβουμε υπόψη την ανάλυση εύρους ζώνης (*resolution bandwidth, RBW*) που χρησιμοποιήθηκε στην προσομοίωση, αφαιρούμε $10\log_{10}(RBW)$, όπου $RBW = 3125\,\mathrm{Hz}$, και λαμβάνουμε τιμή πολύ κοντινή σε αυτή των $52\,\mathrm{dB}$, η οποία σημειώνεται στο Σχ. 1.5 με διακεκομμένη γραμμή, υποδεικνύοντας τη μέση ισχύ του κατωφλίου θορύβου.

Κεφάλαιο 2

Διακοπτικός μείκτης οδηγούμενος από ψηφιακό frequency synthesizer ενός bit

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάται η περίπτωση ενός απλού switching μείκτη, οδηγούμενου από έναν ενσωματωμένο πλήρως ψηφιακό frequency synthesizer ενός bit. Η μπλοκ αρχιτεκτονική του μείκτη φαίνεται στο Σχ. 2.1.

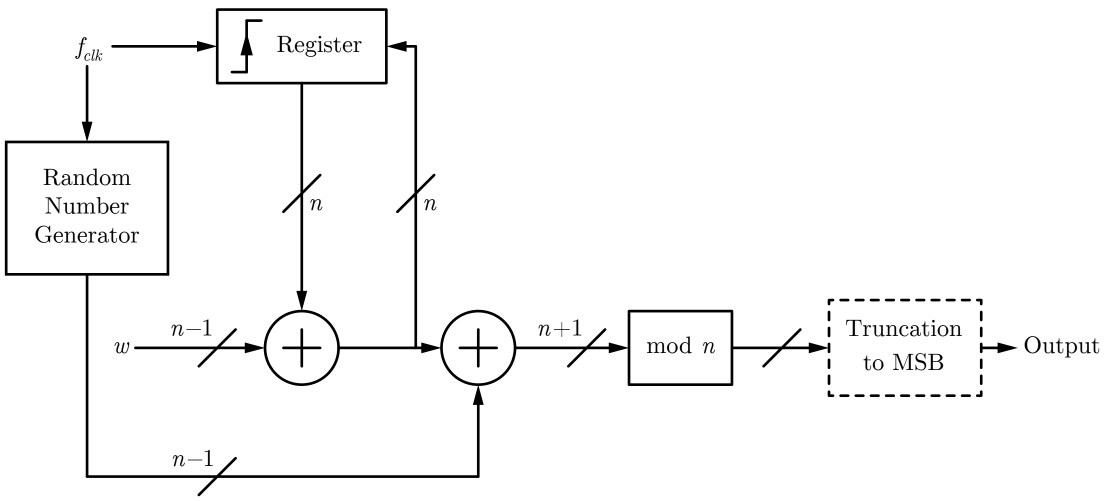


Σχήμα 2.1: Μπλοκ αρχιτεκτονική του switching μείκτη ενός bit.

Αποτελείται από μία πύλη μετάδοσης (*transmission gate*) που ελέγχεται ψηφιακά από τον frequency synthesizer, του οποίου η αρχιτεκτονική περιγράφεται στην επόμενη ενότητα. Επίσης, στις θύρες RF και IF χρησιμοποιούνται παθητικά δίκτυα για ταίριασμα της εμπέδησης.

2.1 Αρχιτεκτονική του frequency synthesizer

Το σήμα LO παρέχεται από ένα PDDS (*Pulse Direct Digital Synthesizer*). Το PDDS αποτελείται από έναν συσσωρευτή φάσης (*phase accumulator*) μήκους n bits, του οποίου το πλέον σημαντικό bit (MSB) χρησιμοποιείται ως σήμα εξόδου, με αποκοπή (*truncation*) των υπόλοιπων bits.



Σχήμα 2.2: Μπλοκ διάγραμμα του frequency synthesizer ενός bit με dithering φάσης.

Η έξοδος του PDDS, λόγω του κβαντισμού, έχει φάσμα το οποίο παρουσιάζει έντονες ανεπιθύμητες συνιστώσες συχνοτήτων (*spurs*), όπως δείξαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Παρ' ότι η ισχυρότερη συνιστώσα είναι τυπικά στην επιθυμητή συχνότητα, η ποιότητα του φάσματος είναι μη αποδεκτή για αναλογικές και RF εφαρμογές. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε dithering, και στην συγκεκριμένη περίπτωση, dithering φάσης. Έτσι, η ισχύς των ανεπιθύμητων συχνοτικών συνιστωσών κατανέμεται στο διάστημα δειγματοληψίας $[0, f_{clk}]$ σχηματίζοντας ένα συνεχές επίπεδο θορύβου.

Για να εφαρμόσουμε dithering, παράγουμε μία τυχαία ψηφιακή ακολουθία αποτελούμενη από IID τυχαίες μεταβλητές και την προσθέτουμε στην έξοδο του συσσωρευτή φάσης, ακριβώς πριν την αποκοπή στο MSB [9]. Η CDF των τυχαίων μεταβλητών είναι της μορφής

$$F(u) = \left(1 + \sin\left(\frac{\pi u}{2^{n-1}} - \frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ με } u = 0, 1, 2, \ldots, (2^{n-1} - 1) \tag{2.1}$$

Έχει αποδειχθεί [8] ότι ένα PDDS με αυτήν την ακολουθία dithering φάσης είναι ισοδύναμο με την διάταξη που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 1 και παράγει σήμα εξόδου χωρίς spurs [9].

2.2 Φάσμα εξόδου του frequency synthesizer

Η συχνότητα εξόδου του synthesizer, βασιζόμενη στη συχνότητα ρολογιού f_{clk}, είναι ίση με $f_{LO} = (w/2^n)f_{clk}$. Η ψηφιακή λέξη w (μήκους $n-1$ bits) χρησιμεύει για έλεγχο της συχνότητας εξόδου και κυμαίνεται στην περιοχή $0 < w < 2^{n-1}$. Επομένως, η συχνότητα εξόδου λαμβάνει τιμές στο εύρος $[0, f_{clk}/2]$, με βήμα $f_{clk}/2^n$.

Έχει αποδειχθεί ότι η έξοδος του υπό μελέτη PDDS είναι ισοδύναμη με αυτήν ενός ημιτόνου, κβαντισμένου σε ένα bit, στη συχνότητα Nyquist και με ομοιόμορφο dithering, δηλαδή η περίπτωση που περιγράψαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Επομένως, η PSD της εξόδου $v(t)$ του synthesizer, λογιζόμενη ως ένα ± 1 σήμα (και όχι ως ψηφιακό 0/1) δίνεται από τη σχέση

$$S_v(f) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{f_{clk}}\right)\left[\frac{1}{4}\delta\left(f \pm \frac{w}{2^n}f_{clk}\right) + \frac{1}{2f_{clk}}\right] \tag{2.2}$$

όπου $f \in [-f_{clk}, f_{clk}]$ και το φάσμα είναι περιοδικό, με περίοδο f_{clk}, αν αγνοήσουμε τον παράγοντα $\operatorname{sinc}^2(f/f_{clk})$.

2.3 Αρχιτεκτονική μείκτη & φάσμα εξόδου

Ο μείκτης, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.1, έχει μία απλή διακοπτική δομή με παθητικά δίκτυα στις θύρες RF και IF για ταίριασμα της εμπέδησης. Ο διακόπτης, που ελέγχεται από την έξοδο του PDDS, δρα ουσιαστικά ως ένας πολλαπλασιαστής με 0 ή 1.

Σε αυτήν την ενότητα θα καταλήξουμε σε εκφράσεις για το φάσμα εξόδου του μείκτη. Θα συμβολίζουμε το RF σήμα εισόδου ως $g(t)$. Η έξοδος του μείκτη είναι κατ' ουσίαν το γινόμενο $y(t) = g(t)x(t)$ όπου $x(t)$ είναι το 0/1 σήμα ενός bit που λαμβάνεται από το frequency synthesizer. Γράφουμε λοιπόν $x(t) = [v(t) + 1]/2$ για να το σχετίσουμε με το ± 1 σήμα που χρησιμοποιήσαμε στον υπολογισμό του φάσματος στην εξίσωση (2.2).

Για να υπολογίσουμε την πυκνότητα φασματικής ισχύος της εξόδου $y(t)$ του μείκτη, υπολογίζουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου που δίνεται από τη σχέση

$$R_y(t, t+\tau) = \frac{1}{4}E\Big\{\big[v(t)+1\big]g(t)\big[v(t+\tau)+1\big]g(t+\tau)\Big\} \tag{2.3}$$

και παρ' ότι το $g(t)$ μπορεί να έχει οποιαδήποτε μορφή, το θεωρούμε ντετερμινιστικό, για παράδειγμα ημιτονικό.

Τότε, η παραπάνω εξίσωση διαμορφώνεται ως

$$\begin{aligned} R_y(t,t+\tau) &= \frac{g(t)g(t+\tau)}{4}E\Big\{v(t)v(t+\tau)+v(t)+v(t+\tau)+1\Big\} \\ &= \frac{g(t)g(t+\tau)}{4}E\Big\{v(t)v(t+\tau)+1\Big\} \\ &= \frac{g(t)g(t+\tau)}{4}\Big[1+R_v(t,t+\tau)\Big] \end{aligned} \tag{2.4}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $E\big\{v(t)\big\}=0$ για όλες τις τιμές του t.

Επειδή το $y(t)$ δεν είναι σήμα στάσιμο με την ευρεία έννοια (*wide-sense stationary*), αντί της R_y πρέπει να χρησιμοποιηθεί η πιο γενική συνάρτηση μέσης αυτοσυσχέτισης (*average-autocorrelation function*) που ορίζεται ως

$$\overline{R}_y(\tau) = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} R_y(t,t+\tau)\,\mathrm{d}t\right] \tag{2.5}$$

Για να απλοποιηθεί η έκφραση, θεωρούμε ότι $g(t)=A\sin(2\pi f_g t)$, και έπειτα από μερικά βήματα προκύπτει

$$\overline{R}_y(\tau) = \frac{A^2}{8}\cos(2\pi f_g t)\left[1+\overline{R}_v(\tau)\right] \tag{2.6}$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του $y(t)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $\overline{R}_y(\tau)$, δηλαδή η συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier των $\cos(2\pi f_g t)$ και $\left[1+\overline{R}_v(\tau)\right]$. Η τελευταία έκφραση γίνεται $[\delta(f)+S_v(f)]$ όπου το S_v δίνεται από την Εξ. (2.2). Επομένως,

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \frac{A^2}{16}\Big[\delta(f-f_g)+\delta(f+f_g)\Big]\otimes\Big[\delta(f)+S_v(f)\Big] \\ &= \frac{A^2}{16}\Big[\delta(f-f_g)+\delta(f+f_g)+S_v(f-f_g)+S_v(f+f_g)\Big] \end{aligned} \tag{2.7}$$

Συνδυάζοντάς και την Εξ. (2.2) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} S_y(f) = {} & \frac{A^2}{16}\Big[\delta(f-f_g)+\delta(f+f_g)\Big] + \\ & + \frac{A^2}{16}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{f-f_g}{f_{clk}}\right)\left[\frac{1}{4}\delta\left(f-f_g\pm\frac{w}{2^n}f_{clk}\right)+\frac{1}{2f_{clk}}\right] \\ & + \frac{A^2}{16}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{f+f_g}{f_{clk}}\right)\left[\frac{1}{4}\delta\left(f+f_g\pm\frac{w}{2^n}f_{clk}\right)+\frac{1}{2f_{clk}}\right] \end{aligned} \tag{2.8}$$

Αφού ο μείκτης χρησιμοποιείται για μετατροπή προς τα κάτω (down-conversion), η επιθυμητή συνιστώσα εξόδου είναι στην συχνότητα $f = \frac{w}{2^n} f_{clk} - f_g$ και έχει πλάτος $\frac{A^2}{64}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{w}{2^n}\right)$ (βλ. Εξ. (2.8)). Από την Εξ. (2.8) η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου στην εν λόγω συχνότητα δίνεται από την έκφραση

$$\frac{A^2}{32 f_{clk}}\left[\mathrm{sinc}^2\left(\frac{w}{2^n} - \frac{2 f_g}{f_{clk}}\right) + \mathrm{sinc}^2\left(\frac{w}{2^n}\right)\right] \tag{2.9}$$

Επομένως, το επίπεδο θορύβου ως προς την επιθυμητή συχνότητα εξόδου είναι ίσο με

$$NPower = 10\log_{10}\left(1 + \frac{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{w}{2^n} - \frac{2f_g}{f_{clk}}\right)}{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{w}{2^n}\right)}\right) - 10\log_{10}(f_{clk}) + 3.01\,\mathrm{dB} \tag{2.10}$$

Αν οι όροι $w/2^n$ και f_g/f_{clk} είναι μικρότεροι από 0.3 περίπου, τότε μπορούμε κατά προσέγγιση να θεωρήσουμε τις συναρτήσεις sinc ως μοναδιαίες και να λάβουμε την απλουστευμένη έκφραση

$$NPower \approx 6 - 10\log_{10}(f_{clk}) \tag{2.11}$$

2.4 Πειραματική διάταξη & μετρήσεις

Η δοκιμαστική μας διάταξη αποτελείται από το διακοπτικό μείκτη του Σχ. 2.1 με τον αμιγώς ψηφιακό frequency synthesizer υλοποιημένο σε ένα μικρό FPGA (XuLA-50 / Xilinx Spartan-3A). Το συγκεκριμένο χαμηλού κόστους FPGA και η πύλη μετάδοσης με χρόνο μετάβασης on/off περίπου ίσο με 5 ns περιόρισαν τη συχνότητα λειτουργίας του μείκτη σε μερικές δεκάδες MHz.

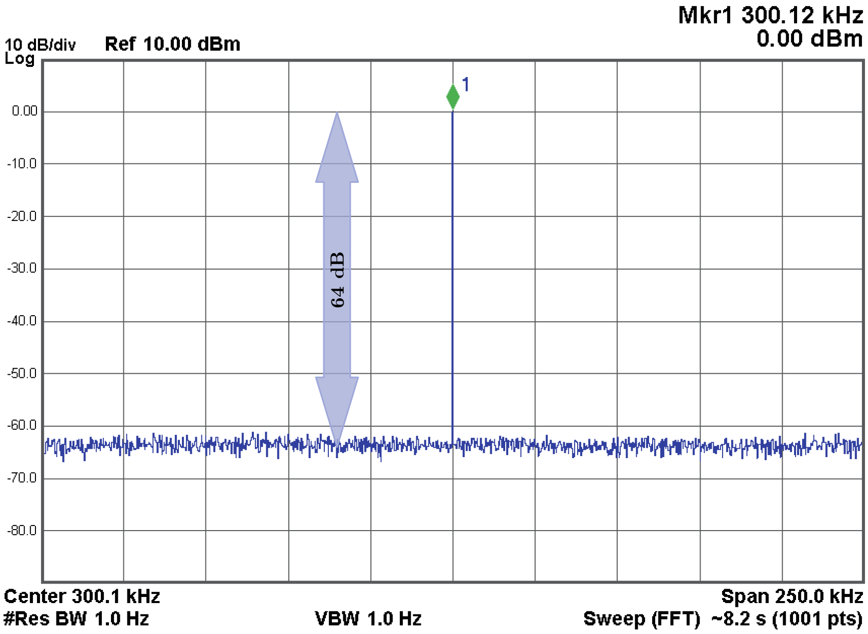
Περίπτωση 1η: Η συχνότητα ρολογιού του PDDS είναι $f_{clk} = 10\,\mathrm{MHz}$ και η παραγόμενη συχνότητα εξόδου ορίζεται σε $f_{LO} = 3\,\mathrm{MHz}$. Το RF σήμα είναι ημίτονο συχνότητας $f_{RF} = 2.7\,\mathrm{MHz}$. Το φάσμα εξόδου του μείκτη, κενταρισμένο στην επιθυμητή συνιστώσα εξόδου $f_{LO} - f_{RF}$ φαίνεται στο Σχ. 2.3.

Από την Εξ. (2.11) λαμβάνουμε ότι το επίπεδο θορύβου στην περίπτωση αυτή είναι περίπου **−64 dBc**, τιμή που επιβεβαιώνεται από τη μέτρηση στο Σχ. 2.3.

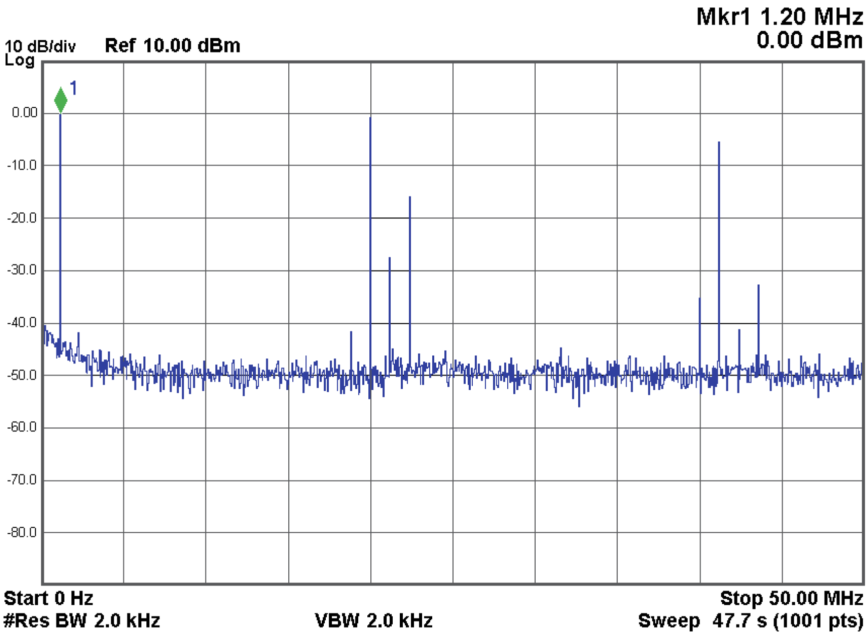
Περίπτωση 2η: Η συχνότητα ρολογιού του PDDS είναι $f_{clk} = 200\,\mathrm{MHz}$ και η παραγόμενη συχνότητα εξόδου ορίζεται σε $f_{LO} = 21.2\,\mathrm{MHz}$. Το RF σήμα είναι ημίτονο συχνότητας $f_{RF} = 20\,\mathrm{MHz}$. Το φάσμα εξόδου του μείκτη στο εύρος $0 - 50\,\mathrm{MHz}$ φαίνεται στο Σχ. 2.4 καθώς και στο Σχ. 2.5 το οποίο είναι κενταρισμένο στην επιθυμητή συχνότητα εξόδου $f_{LO} - f_{RF}$.

Η κλίση του επιπέδου θορύβου κοντά στο μηδέν οφείλεται πιθανότατα σε λανθασμένη βαθμονόμηση του αναλυτή φάσματος κάτω από τα 10 MHz.

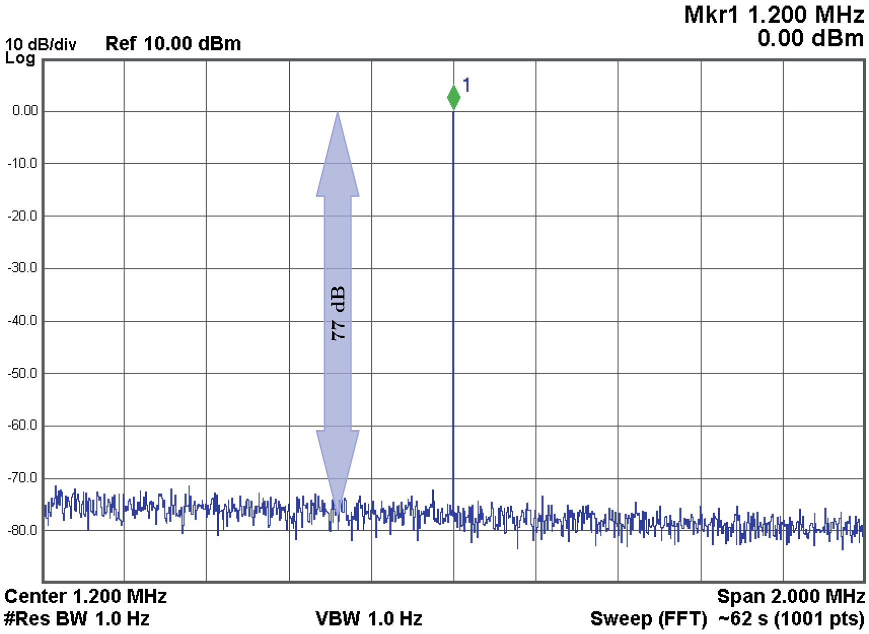
Πάλι, χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.11) λαμβάνουμε ότι το επίπεδο θορύβου θα έπρεπε να είναι περίπου $\mathbf{-77\,dBc}$. Η εκτίμηση αυτή επιβεβαιώνεται από την μέτρηση του Σχ. 2.5.



Σχήμα 2.3: Φάσμα εξόδου του μείκτη, με $f_{clk} = 10\,\text{MHz}$, $f_{RF} = 2.7\,\text{MHz}$, $f_{LO} = 3\,\text{MHz}$.



Σχήμα 2.4: Φάσμα εξόδου του μείκτη, με $f_{clk} = 200\,\text{MHz}$, $f_{RF} = 20\,\text{MHz}$ και $f_{LO} = 21.2\,\text{MHz}$, στο εύρος 0 ως 50 MHz.



Σχήμα 2.5: Φάσμα εξόδου του μείκτη, με $f_{clk} = 200\,\mathrm{MHz}$, $f_{RF} = 20\,\mathrm{MHz}$ και $f_{LO} = 21.2\,\mathrm{MHz}$, κεντραρισμένο γύρω από την συχνότητα $f_{LO} - f_{RF}$.

2.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετήθηκε ένας απλός διακοπτικός μείκτης οδηγούμενος από έναν πλήρως ψηφιακό frequency synthesizer ενός bit με dithering. Το φάσμα εξόδου υπολογίστηκε αναλυτικά και οι μετρήσεις συμφωνούν με τη θεωρία.

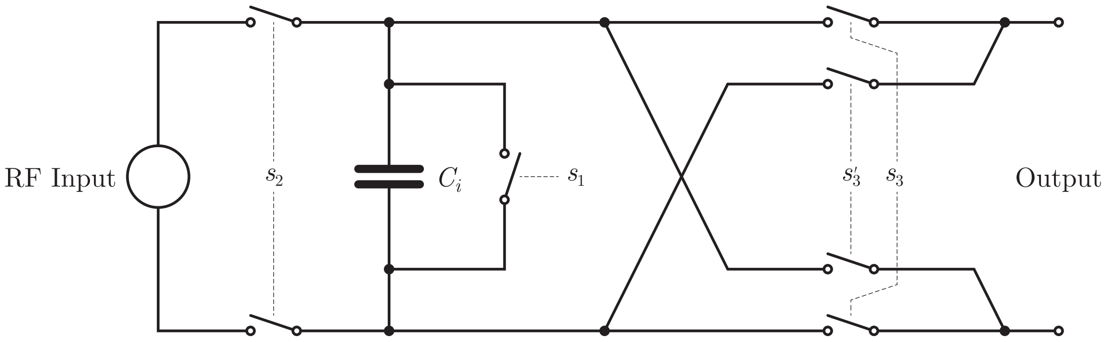
Μία επέκταση αυτού του κυκλώματος, που χρησιμοποιεί πολλούς διακόπτες για την επίτευξη καλύτερης απόδοσης, θα μελετηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

Επέκταση σε πολλά bits με διακοπτόμενους πυκνωτές

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε έναν μείκτη πολλών bits, ο οποίος χρησιμοποιεί διακοπτόμενους πυκνωτές για τη λειτουργία του. Η τροφοδότηση του LO παραμένει ψηφιακή και χρησιμοποιεί dithering, κατά τα γνωστά.

Το βασικό μπλοκ του μείκτη αυτού φαίνεται στο Σχ. 3.1.



Σχήμα 3.1: Ιδανική αναπαράσταση του πολλαπλασιαστή διακοπτόμενων πυκνωτών.

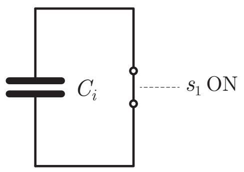
3.1 Περιγραφή λειτουργίας

Το κύκλωμα του παραπάνω σχήματος αποτελείται από έναν πυκνωτή, μερικούς διακόπτες και θύρες είσοδου και έξοδου.

Θα αναλύσουμε την λειτουργία του κυκλώματος αυτού για έναν συγκεκριμένο τρόπο λειτουργίας. Αυτός ο τρόπος αποτελείται από τα εξής βήματα: μία τάση εισόδου εφαρμόζεται στον πυκνωτή, έπειτα, ανάλογα με την ψηφιακή τιμή του σήματος που παρέχεται ως LO, κάποιοι πυκνωτές αναστρέφονται και όλη η συστοιχία συνδέεται στον πυκνωτή εξόδου. Το φορτίο ανακατανέμεται αμέσως και η τάση εξόδου αναπτύσσεται τελικά στον πυκνωτή εξόδου.

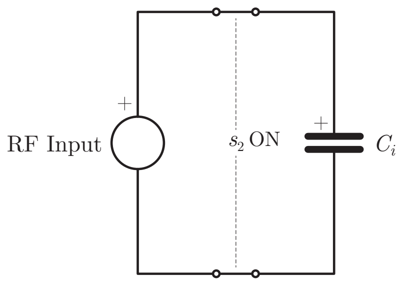
Απαραίτητη προϋπόθεση για την προβλεπόμενη λειτουργία του κυκλώματος είναι να ενεργοποιούνται οι τρεις φάσεις από ρολόγια με αμοιβαία μη επικαλυπτόμενους παλμούς, ώστε να είναι διακριτές μεταξύ τους οι καταστάσεις.

- **Φάση 1 (reset):** Ο διακόπτης s_1 χρησιμοποιείται για μηδενισμό της τάσης του πυκνωτή, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.2.



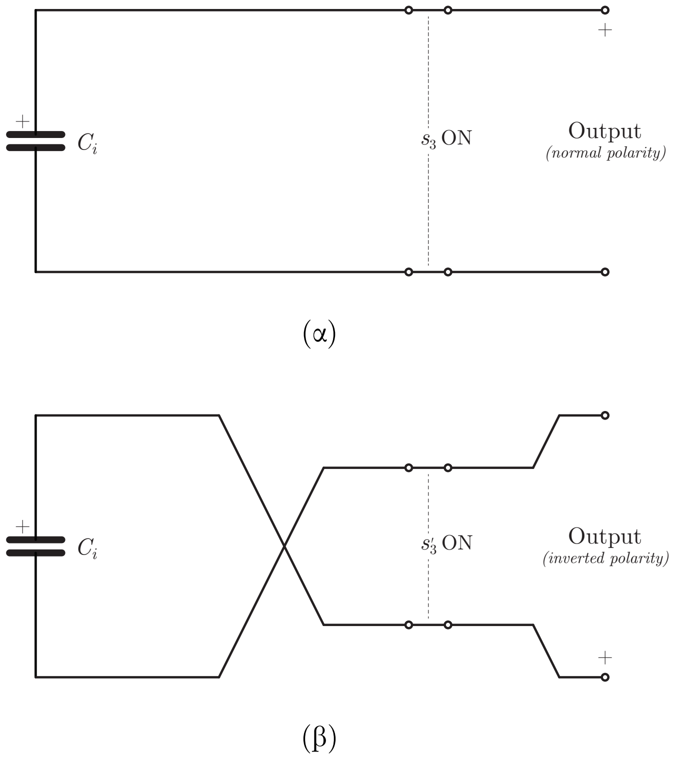
Σχήμα 3.2: Φάση 1 – Μηδενισμός της τάσης του πυκνωτή.

- **Φάση 2 (charge):** Το ζεύγος διακοπτών s_2 χρησιμοποιείται για εφαρμογή της τάσης εισόδου στον πυκνωτή C_i, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.3.



Σχήμα 3.3: Φάση 2 – Φόρτιση του πυκνωτή από την πηγή εισόδου.

- **Φάση 3 (output):** Τα ζεύγη διακοπτών s_3, s_3' χρησιμοποιούνται για το πέρασμα της τάσης του πυκνωτή στην έξοδο, με ορθή ή αναστροφή πολικότητα, σύμφωνα με το bit ελέγχου, που θα λαμβάνεται από το ψηφιακό LO σήμα. Η λειτουργία της φάσης αυτής φαίνεται στο Σχ. 3.4.



Σχήμα 3.4: Φάση 3 – Πέρασμα της τάσης του πυκνωτή στην έξοδο (α) με ορθή πολικότητα, ή (β) με ανάστροφη πολικότητα.

3.2 Ανάλυση με εξισώσεις κατάστασης

Ο μείκτης που μελετάμε χρησιμοποιεί μία συστοιχία από πανομοιότυπα υποκύκλωματα όπως αυτό που περιγράψαμε του Σχ. 3.1. Όλα τα υποκυκλώματα έχουν ίσης χωρητικότητας πυκνωτές και ακολουθούν ταυτόχρονα τις τρεις φάσεις λειτουργίας που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Στην τρίτη φάση, το ψηφιακό σήμα LO ορίζει ποιοι πυκνωτές θα περάσουν στην έξοδο την τάση τους με ορθή ή ανάστροφη πολικότητα. Έτσι, επιτυγχάνεται, σε κάθε υποκύκλωμα, πολλαπλασιασμός με ± 1, ενώ, συνολικά, μετά τις ανακατανομές φορτίου, εμφανίζεται στην έξοδο ένα κλάσμα της τάσης εισόδου που είναι ανάλογο με το σήμα LO, το οποίο υποδηλώνει τη διαδικασία του πολλαπλασιασμού του τελευταίου με το σήμα εισόδου.

Έστω ότι ο μείκτης χρησιμοποιεί m το πλήθος τέτοια υποκυκλώματα με διακοπτόμενο πυκνωτή. Συνεπώς, έχουμε στο κύκλωμα $m + 1$ μεταβλητές κατάστασης, λαμβάνοντας υπόψη και την τάση του πυκνωτή που συνδέεται ως φορτίο στην έξοδο της συστοιχίας. Θεωρούμε επίσης ότι οι διακόπτες παρουσιάζουν εσωτερική αντίσταση R.

- **Φάση 1 (reset) $\boldsymbol{0 \leq t \leq t_1}$:** Έστω $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ οι τάσεις στα άκρα των m πυκνωτών και v_{out} η τάση του πυκνωτή εξόδου. Γράφοντας τις εξισώσεις κατάστασης για την διαδικασία αυτή, παίρνουμε την παρακάτω μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \dot{v}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{v}_m(t) \\ \dot{v}_{out}(t) \end{bmatrix} = -\frac{1}{RC} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Η λύση για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_1$ που διαρκεί η πρώτη φάση είναι:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{RC}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{RC}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{t}{RC}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{-\frac{t}{RC}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \\ \vdots \\ v_m(0) \\ v_{out}(0) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

- **Φάση 2 (charge) $t_1 < t \leq t_2$:** Έστω $u(t)$ το σήμα της RF εισόδου. Με την προϋπόθεση ότι η συχνότητα λειτουργίας f_S του κυκλώματος είναι αρκετά μεγαλύτερη από την συχνότητα του $u(t)$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $u(t)$ είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της δεύτερης φάσης. Γράφοντας τις εξισώσεις κατάστασης για τη διαδικασία αυτή, παίρνουμε την παρακάτω μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \dot{v}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{v}_m(t) \\ \dot{v}_{out}(t) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2RC} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{2RC} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.3}$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει τη μορφή:

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \tag{3.4}$$

με την ακόλουθη λύση, για το διάστημα $(t_1, t_2]$:

$$\boldsymbol{v}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_1)}\boldsymbol{v}(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau \tag{3.5}$$

και επειδή θεωρούμε την $u(t)$ σταθερή και ίση με $u(t_1)$, λαμβάνουμε την εξής αναλυτική λύση:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = e^{-\frac{t-t_1}{2RC}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\frac{t-t_1}{2RC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t_1) \\ v_2(t_1) \\ v_3(t_1) \\ \vdots \\ v_m(t_1) \\ v_{out}(t_1) \end{bmatrix} + 2RC(1-e^{-\frac{t-t_1}{2RC}}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t_1) \tag{3.6}$$

- **Φάση 3 (output) $t_2 < t \leq t_3$:** Ας ορίσουμε πρώτα κάποια μεγέθη για απλοποίηση των αλγεβρικών αναπαραστάσεων.

Έστω:

p_i: η πολικότητα του i-οστού πυκνωτή ($+1$ για ορθή, ή -1 για ανάστροφη)

k : λόγος χωρητικότητας ενός πυκνωτή της συστοιχίας προς τη χωρητικότητα του C_{out}, δηλαδή $\frac{C_i}{C_{out}}$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{p} = [p_1\ p_2\ \ldots\ p_m]^\top$ (μήκους $m = 2^b$) αποτελεί αναπαράσταση σε θερμομετρικό κώδικα της δυαδικής λέξης (μήκους b bits) που δίνεται ως σήμα LO, με την ιδιαιτερότητα ότι κατασκευάζεται με ± 1 ώστε να αντιστρέφει ένα μέρος της συστοιχίας πυκνωτών κάθε φορά.

Γράφοντας τις εξισώσεις κατάστασης σε μητρική μορφή, λαμβάνουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \dot{v}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{v}_m(t) \\ \dot{v}_{out}(t) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2RC} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -p_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -p_m \\ -kp_1 & -kp_2 & -kp_3 & \cdots & -kp_m & mk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ έχει τη μορφή:

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{2RC}\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{p} \\ \hline -a\boldsymbol{p}^\top & mk \end{array}\right] \tag{3.8}$$

Επειδή είναι δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά ο $e^{\boldsymbol{A}t}$ για αυτόν τον πίνακα, μπορούμε να βρούμε μία έκφραση για τον $\boldsymbol{A}^n$ και να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα σε σειρά για την προσέγγιση του $e^{\boldsymbol{A}t}$.

Με την παρατήρηση ότι $\boldsymbol{p}^\top\boldsymbol{p} = m$, προχωράμε σε υπολογισμό του $\boldsymbol{A}^2$:

$$\boldsymbol{A}^2 = \left(-\frac{1}{2RC}\right)^2\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} + k\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\top & -(1+mk)\boldsymbol{p} \\ \hline -(k+mk^2)\boldsymbol{p}^\top & mk + (mk)^2 \end{array}\right] \tag{3.9}$$

Άρα, η έκφραση που αναζητούμε για τον $\boldsymbol{A}^n$ είναι η εξής:

$$\boldsymbol{A}^n = \left(-\frac{1}{2RC}\right)^n\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} + \alpha_n\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\top & \beta_n\boldsymbol{p} \\ \hline \gamma_n\boldsymbol{p}^\top & \delta_n \end{array}\right] \tag{3.10}$$

Τότε, ο $\boldsymbol{A}^{n+1} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{A}$ θα είναι:

$$\boldsymbol{A}^{n+1} = \left(-\frac{1}{2RC}\right)^{n+1}\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} + (\alpha_n - k\beta_n)\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\top & (-1 - m\alpha_n + mk\beta_n)\boldsymbol{p} \\ \hline (\gamma_n - k\delta_n)\boldsymbol{p}^\top & -m\gamma_n + mk\delta_n \end{array}\right] \tag{3.11}$$

Με απλή επισκόπηση, λαμβάνουμε τα συστήματα:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -m & mk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gamma_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -m & mk \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{X}} \begin{bmatrix} \gamma_n \\ \delta_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Για το δεύτερο σύστημα, η λύση είναι:

$$\begin{bmatrix} \gamma_n \\ \delta_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{X}^{n-1} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{X}^{n-1} \begin{bmatrix} -k \\ mk \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Για το πρώτο σύστημα, εργαζόμαστε ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{X}^{n-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{n-2} \boldsymbol{X}^j \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Όμως:

$$\sum_{j=0}^{n-2} \boldsymbol{X}^j = (\boldsymbol{X}^{n-1} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{I})^{-1} \tag{3.15}$$

Άρα:

$$\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{X}^{n-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + (\boldsymbol{X}^{n-1} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{I})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Διαγωνοποιούμε τον $\boldsymbol{X}$ και, έπειτα από μερικά βήματα, βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{X}^{n-1} = (1 + mk)^{n-2} \boldsymbol{X} \tag{3.17}$$

και

$$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{I})^{-1} = \frac{1}{mk} \begin{bmatrix} 1 - mk & -k \\ -m & 0 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Αντικαθιστούμε παραπάνω και λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\left[(1+mk)^{n-1}-1\right] \\ -(1+mk)^{n-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \gamma_n \\ \delta_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k(1+mk)^{n-1} \\ mk(1+mk)^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Άρα, ο $\boldsymbol{A}^n$ θα είναι:

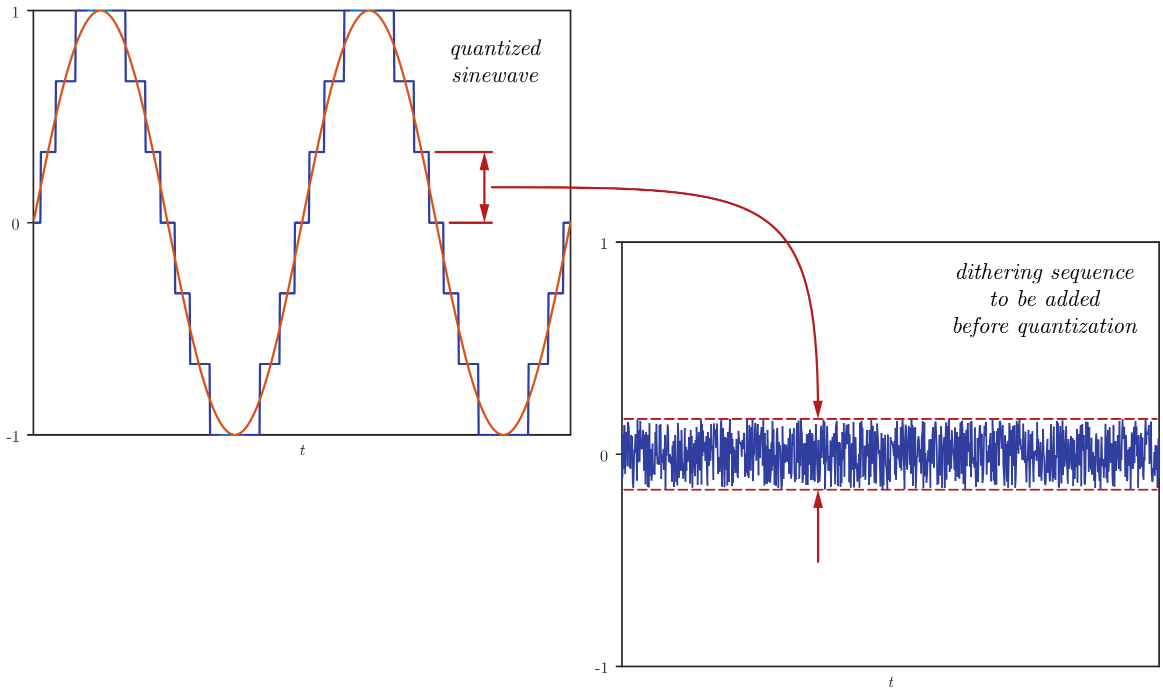
$$\boldsymbol{A}^n = \left(-\frac{1}{2RC}\right)^n \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} + \frac{1}{m}\left[(1+mk)^{n-1}-1\right]\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^\top & -(1+mk)^{n-1}\boldsymbol{p} \\ \hline -k(1+mk)^{n-1}\boldsymbol{p}^\top & mk(1+mk)^{n-1} \end{array}\right] \tag{3.20}$$

και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην προσέγγιση του $e^{\boldsymbol{A}t}$ μέσω της έκφρασης:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n t^n \tag{3.21}$$

3.3 Προσομοίωση με χρήση MATLAB

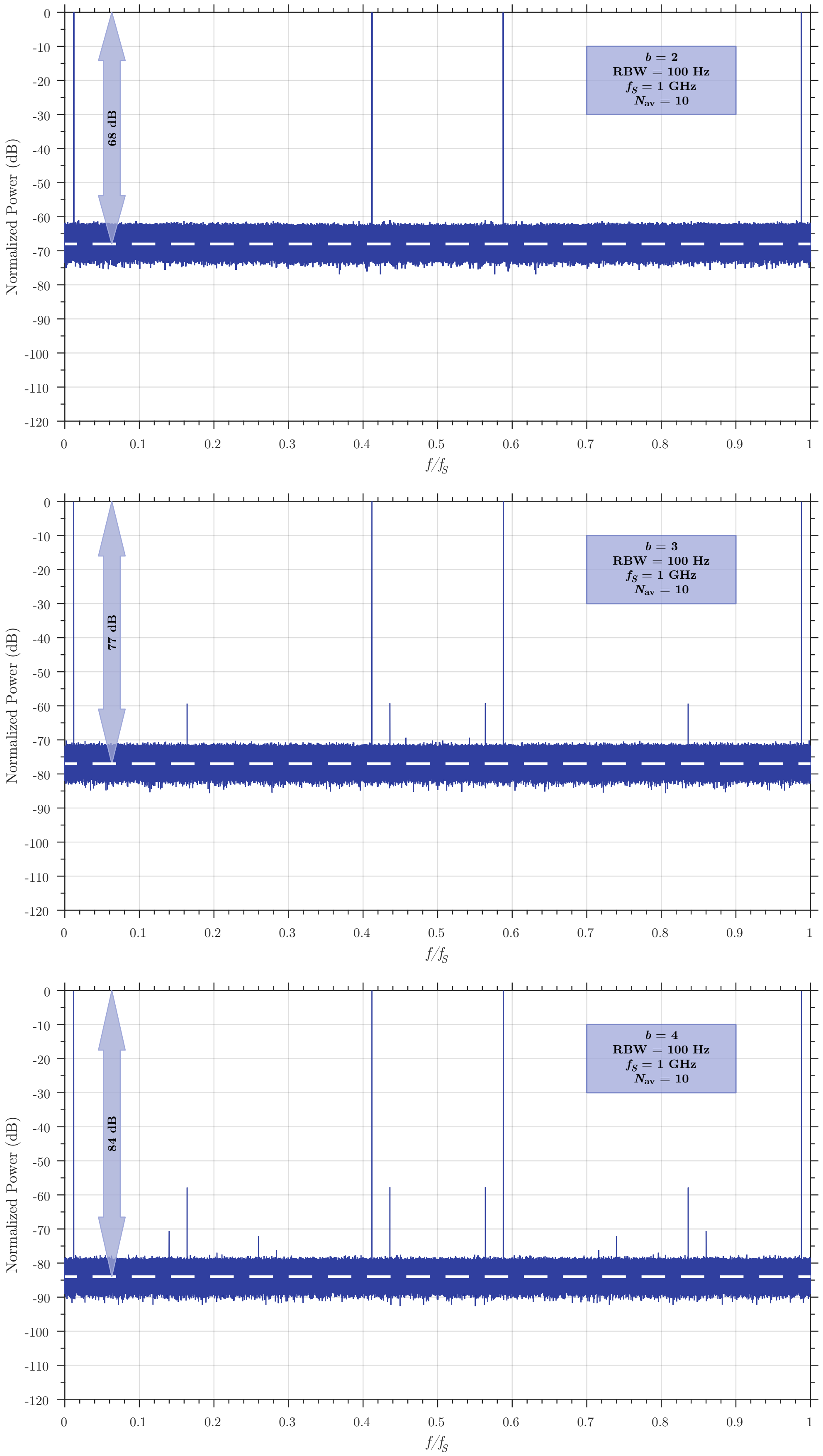
Για την προσομοίωση της λειτουργίας του κυκλώματος, τα παραπάνω συστήματα διαφορικών εξισώσεων εισήχθησαν στο περιβάλλον του MATLAB. Τα δύο σήματα εισόδου ήταν ημιτονοειδή, ενώ στο LO εφαρμόστηκε ομοιόμορφα κατανεμημένο dithering πλάτους πριν την κβάντιση, με τις στατιστικές ιδιότητες που περιγράφηκαν στο Κεφ. 1. Το πλάτος του dithering ήταν σε κάθε περίπτωση το λιγότερο δυνατό για την εξάλειψη των spurs, δηλαδή ίσο με την διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών σταθμών κβάντισης, όπως φαίνεται και στο Σχ. 3.5.



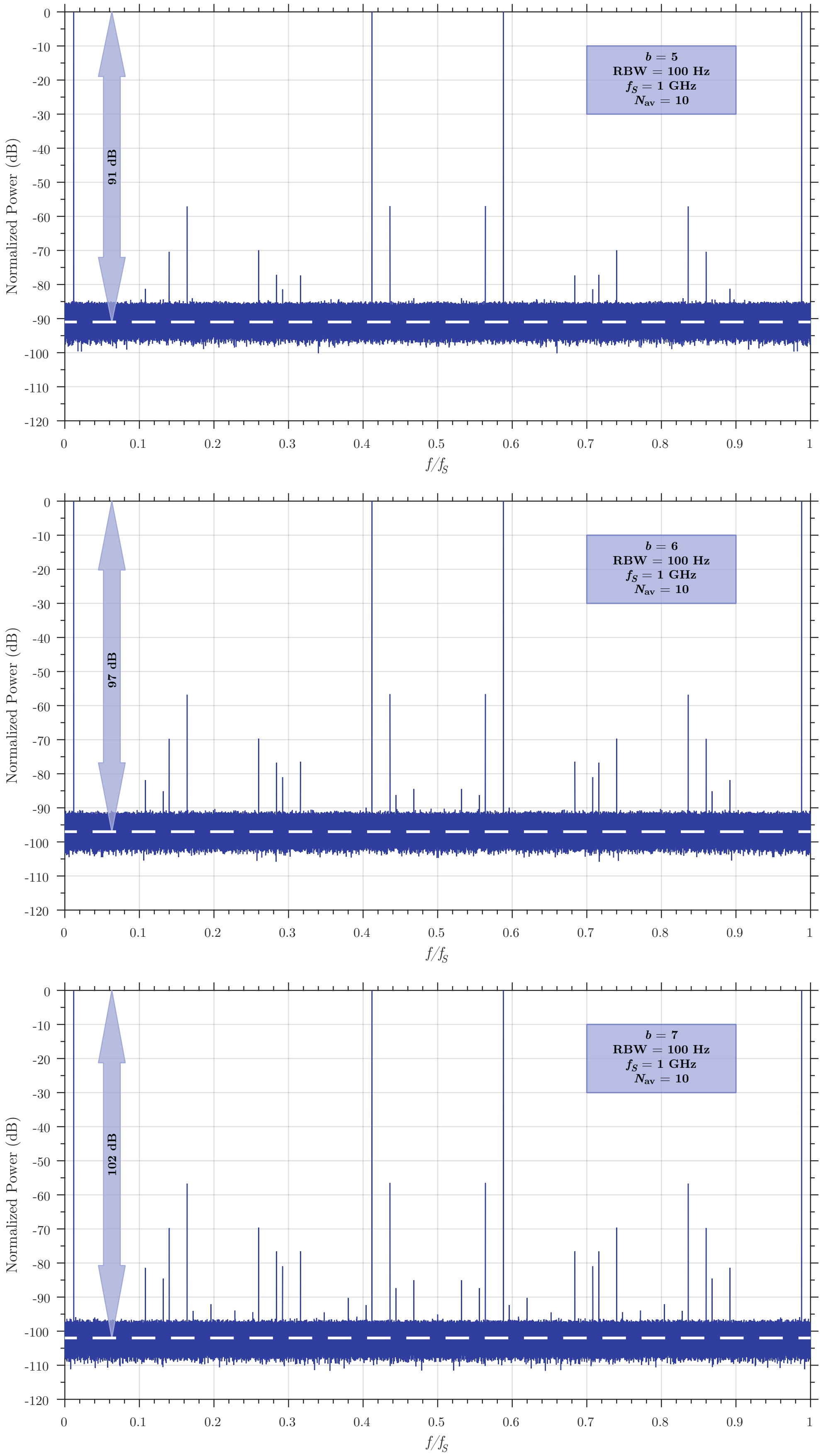
Σχήμα 3.5: Απεικόνιση, στο πεδίο του χρόνου, του πλάτους dithering ως προς τις στάθμες κβάντισης, για την περίπτωση των $b = 3$ bits.

Στις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν εξετάζουμε την επίδραση της χρήσης πολλών bits για την αναπαράσταση του LO. Σε όλες, ισχύει $f_S = 1\,\text{GHz}$, $RBW = 100\,\text{Hz}$, $f_{LO} = 0.212 f_S$ και $f_{RF} = 0.2 f_S$. Επίσης, για τα παθητικά στοιχεία, ορίζουμε τις τιμές $R = 100\,\Omega$, $C_i = 1\,\text{pF}$, $C_{out} = 50\,\text{fF}$.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, είναι εμφανές ότι τα spurs λόγω κβαντισμού έχουν μετατραπεί σε συνεχές κατώφλι θορύβου με τη χρήση του dithering, ενώ αυτά που έχουν απομείνει και εμφανίζονται στις παραπάνω γραφικές παραστάσεις είναι mixer spurs και αποτελούν λογικό επακόλουθο της μη γραμμικής συμπεριφοράς του μείκτη. Αυξάνοντας τα bits, δηλαδή την ανάλυση, μειώνεται το σφάλμα κβάντισης, άρα και το επίπεδο θορύβου, σε βάρος, βέβαια, της πολυπλοκότητας της σχεδίασης.



Σχήμα 3.6: Φάσματα εξόδου $[0, f_S]$ του μείκτη, για $b = 2, 3, 4$, με $f_S = 1\,\mathrm{GHz}$, $RBW = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_{LO} = 0.212 f_S$, $f_{RF} = 0.2 f_S$, $R = 100\,\Omega$, $C_i = 1\,\mathrm{pF}$, $C_{out} = 50\,\mathrm{fF}$.



Σχήμα 3.7: Φάσματα εξόδου $[0, f_S]$ του μείκτη, για $b = 5, 6, 7$, με $f_S = 1\,\mathrm{GHz}$, $RBW = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_{LO} = 0.212 f_S$, $f_{RF} = 0.2 f_S$, $R = 100\,\Omega$, $C_i = 1\,\mathrm{pF}$, $C_{out} = 50\,\mathrm{fF}$.

Ανασκόπηση – Μελλοντική εργασία

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση διακοπτικών μεικτών με χρήση ενσωματωμένου πλήρως ψηφιακού frequency synthesizer.

Σε ένα πρώτο επίπεδο, διερευνάται αναλυτικά η ψηφιακή σύνθεση συχνότητας ενός bit. Στη μελέτη αυτή [Κεφάλαιο 1] έγινε αναφορά στα ανεπιθύμητα spurs που παρουσιάζει η συγκεκριμένη τεχνική λόγω του κβαντισμού σε ένα bit και προτάθηκε η χρήση τυχαίας ακολουθίας dithering για την αντιμετώπισή τους. Καταλήξαμε σε αναλυτικές εκφράσεις για το φάσμα εξόδου της τεχνικής αυτής και αποδείξαμε ότι το dithering με ομοιόμορφη κατανομή εξαλείφει πλήρως τα spurs, δημιουργώντας ένα επίπεδο θορύβου.

Σε ένα δεύτερο επίπεδο, εξετάστηκε η λειτουργία ενός απλού διακοπτικού μείκτη [Κεφάλαιο 2], που χρησιμοποιεί ως σήμα LO ένα πλήρως ψηφιακό frequency synthesizer ενός bit, με τις ιδιότητες του dithering που αναφέρθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο. Το φάσμα εξόδου του μείκτη υπολογίστηκε αναλυτικά και η θεωρία συμφωνεί με τις μετρήσεις που ελήφθησαν από την πειραματική διάταξη.

Τέλος, παρουσιάστηκε μία επέκταση του μείκτη σε περισσότερα bits που παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον, λόγω της χρήσης διακοπτόμενων πυκνωτών [Κεφάλαιο 3]. Η λειτουργία του κυκλώματος μοντελοποιήθηκε με εξισώσεις κατάστασης και έγιναν προσομοιώσεις στο MATLAB για να διαπιστωθεί η βελτίωση της απόδοσης. Όπως ήταν αναμενόμενο, η αύξηση της ανάλυσης μείωσε το θόρυβο κβάντισης και το επίπεδο θορύβου έπεσε σημαντικά ως προς την επιθυμητή συνιστώσα στην έξοδο.

Το επόμενο βήμα για την μελέτη αυτού του κυκλώματος, που όμως αφήνεται εκτός του πλαισίου της παρούσας διπλωματικής, είναι η προσομοίωση με πραγματικά μοντέλα σύγχρονων τεχνολογιών. Χρήζει διερεύνησης η επίδραση που θα είχε η τροποποίηση της διάρκειας των τριών φάσεων καθώς και η υιοθέτηση παρόμοιων τοπολογιών διακοπτόμενων πυκνωτών. Τέλος, θα πρέπει να γίνει ένας πλήρης χαρακτηρισμός του μείκτη ως προς όλες τις παραμέτρους (θόρυβος, απώλειες, γραμμικότητα κ.λπ.). Ο συγγραφέας ελπίζει να του δοθεί η ευκαιρία να υλοποιήσει το σύστημα αυτό στο μέλλον.

Βιβλιογραφία

[1] Analog Devices. “MT-080, Mixers and Modulators”. Oct. 2008.

[2] T. H. Lee. “The Design of CMOS Radio-Frequency Integrated Circuits”. 2nd ed. Cambridge University Press, 2004.

[3] J. Vankka and K. Halonen. “Direct Digital Synthesizers: Theory, Design and Applications”. Springer, 2006.

[4] J. C. Gandy and Gabor C. Temes. “Oversampling Delta-Sigma Data Converters: Theory, Design, and Simulation”. Wiley-IEEE Press, 1991.

[5] J. Proakis and M. Salehi. “Digital Communications”. McGraw-Hill, 2007.

[6] R. M. Gray. “Quantization Noise Spectra”. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 36.6 (Nov. 1990), pp. 1220–1244.

[7] J. P. Boyd. “Chebyshev and Fourier Spectral Methods”. 2nd ed. Dover Publications, 2001.

[8] P. P. Sotiriadis and N. Miliou. “Single-Bit Digital Frequency Synthesis via Dithered Nyquist-Rate Sinewave Quantization”. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 61.1 (Sept. 2013), pp. 61–73.

[9] K. Galanopoulos and P. P. Sotiriadis. “Optimal Dithering Sequences for Spurs Suppression in Pulse Direct Digital Synthesizers”. In: *IEEE International Frequency Control Symposium (FCS)*. IEEE. Baltimore, MD, May 2012, pp. 1–4.

Κατάλογος δημοσιεύσεων του συγγραφέα

- P. P. Sotiriadis and N. Stamatopoulos. “All-digital frequency synthesis based on single-bit Nyquist-rate sinewave quantization with IID random dithering”. In: *Joint European Frequency and Time Forum & International Frequency Control Symposium*, 21-25 July 2013, Prague, Czech Republic, pp. 213–216.
- P. P. Sotiriadis and N. Stamatopoulos. “Dynamic range Vs spectral clarity trade-off in all-digital frequency synthesis via single-bit sinewave quantization”. In: *Joint European Frequency and Time Forum & International Frequency Control Symposium*, 21-25 July 2013, Prague, Czech Republic, pp. 708–711.
- N. Stamatopoulos, K. Galanopoulos and P. P. Sotiriadis. “Switching down-converting RF mixer with embedded single-bit-output all-digital frequency synthesizer”. In: *Joint European Frequency and Time Forum & International Frequency Control Symposium*, 21-25 July 2013, Prague, Czech Republic, pp. 741–743.