



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Μοντελοποίηση Συστημάτων με Εφαρμογή σε Νέα Κλάση Διαμορφωτών Σ-Δ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Κων/νου Α. Τουλούπα

Επιβλέπων : Π. Π. Σωτηριάδης
Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2017



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Μοντελοποίηση Συστημάτων με Εφαρμογή σε Νέα Κλάση Διαμορφωτών Σ-Δ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Κων/νου Α. Τουλούπα

Επιβλέπων : Π. Π. Σωτηριάδης
Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 18^η Οκτωβρίου 2017.

(Υπογραφή)

.....
Π. Π. Σωτηριάδης
Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

(Υπογραφή)

.....
Ιωάννα Ρουσσάκη
Επ. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

(Υπογραφή)

.....
Κιαμάλ Πεκμεστζή
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2017

(Υπογραφή)

.....

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΤΟΥΛΟΥΠΑΣ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Τουλούπας Κων/νος, 2017.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος . All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η μοντελοποίηση συστημάτων, δυναμικών και ηλεκτρικών, είναι ένας κλάδος ο οποίος λαμβάνει μεγάλης προσοχής από την ερευνητική κοινότητα τα τελευταία χρόνια. Η μαθηματική μοντελοποίηση και η προσομοίωσή τους είναι ουσιώδη στοιχεία για την κατανόηση της δομής των συστημάτων σε ένα ευρύ φάσμα επιστημών.

Στην παρούσα διπλωματική αναπτύσσουμε μια νέα μέθοδο μοντελοποίησης συστημάτων, όταν μόνο η συχνοτική απόκριση πλάτους τους είναι διαθέσιμη, και την εφαρμόζουμε για την εξαγωγή γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων και ευσταθών μοντέλων για διαμορφωτές Σ - Δ που ανήκουν στην κατηγορία των Multi-Step Look-Ahead διαμορφωτών.

Συγκεκριμένα, προτείνουμε μια τεχνική με την οποία μπορούμε να επιλέξουμε τη διέγερση του συστήματος και τη συλλογή δεδομένων από την προσομοίωσή του ώστε τα δεδομένα να είναι αντιπροσωπευτικά. Τα δεδομένα αυτά, στα πρότυπα της αναγνώρισης συστημάτων, υφίστανται φιλτράρισμα και επεξεργασία πριν τη διαδικασία της μοντελοποίησης, ώστε να παρέχουν βέλτιστα αποτελέσματα. Έπειτα, χρησιμοποιείται μια μέθοδος που βασίζεται στο ανάφασμα των δεδομένων εξόδου του συστήματος, με σκοπό αυτά να εμπλουτιστούν με ακολουθία φάσης, η οποία αρχικά δεν ήταν διαθέσιμη.

Η μοντελοποίηση του συστήματος γίνεται με βάση το νέο, επεξεργασμένο σύνολο δεδομένων. Χρησιμοποιείται μια παραλλαγή του αλγόριθμου Vector Fitting, που μοντελοποιεί συστήματα διακριτού χρόνου. Η διαδικασία μοντελοποίησης συστημάτων με ρητά μοντέλα περιλαμβάνει την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων ελαχίστων τετραγώνων. Ο Vector Fitting αλγόριθμος γραμμικοποιεί τα μαθηματικά συστήματα μέσω της επίλυσης γραμμικών εξισώσεων σε επαναλήψεις, και μέσω της ανανέωσης των πόλων του μοντέλου σε κάθε επανάληψη. Συνιστά, επίσης, μια αριθμητικά ευσταθή μέθοδο καθώς μπορεί να μοντελοποιήσει συστήματα σε ένα ευρύ συχνοτικό φάσμα.

Η προτεινόμενη μέθοδος μοντελοποίησης αποτελεί μια τεχνική για ελάττωση της πολυπλοκότητας του συστήματος. Συγκεκριμένα, η επιλογή της πολυπλοκότητας του μοντέλου γίνεται πριν την μοντελοποίηση και σε περίπτωση που είναι μικρότερη από την πολυπλοκότητα του πραγματικού συστήματος, έχει ως αποτέλεσμα ένα μοντέλο το οποίο πλησιάζει με βέλτιστο τρόπο το πραγματικό, διατηρώντας τις κύριες συνιστώσες του μόνο.

Γίνεται, τέλος, εφαρμογή σε κλασσικούς διαμορφωτές Σ - Δ καθώς και στους μη γραμμικούς διαμορφωτές Multi-Step Look-Ahead Σ - Δ . Οι δεύτεροι δεν έχουν μαθηματική σχέση που να συνδέει είσοδο και έξοδο. Με τη χρήση της μεθόδου που προτείνουμε, εξάγουμε σχέσεις για τον θόρυβο στην έξοδό τους με μεγάλη ακρίβεια, χρησιμοποιώντας μόνο στοιχεία πλάτους.

Λέξεις Κλειδιά: Αναγνώριση συστημάτων, μαθηματική μοντελοποίηση, μείωση της πολυπλοκότητας μοντέλου, διαμορφωτές Σ - Δ , μη γραμμικά συστήματα, ανάφασμα, Vector Fitting αλγόριθμος

Abstract

System modeling is a rapidly growing engineering topic, and has been under research for several decades. A model is a mathematical representation of a real system that contributes to its better understanding and to its efficient simulation.

This work proposes a new method for modeling systems when frequency response magnitude data are only available. It is implemented on Matlab and applied to classical Sigma-Delta modulators, as well as Multi-Step Look-Ahead ones.

The methodology includes a technique that enables us to choose properly the excitation of the real system, so as for the data to be informative. These data are passed by a prefilter and decimated, in order to achieve good results, as in classic system identification methods. Furthermore, a phase sequence is inserted in the data, using the complex cepstrum of the output data of the real system. Hence, the absence of phase data is overcome.

The core of the modeling procedure is based on the set of filtered data with the inserted phase sequence. A modification of the Vector Fitting algorithm uses this set to provide us with a discrete time model. System modeling using rational models includes solving nonlinear least squares equations. Vector Fitting linearizes the nonlinear mathematical equations by solving linear problems recursively, and relocating the poles of the model in each iteration. In addition, it ensures good numerical conditioning and it is capable of providing accurate results in wide frequency bands.

The proposed method constitutes a technique for model order reduction as well. More precisely, the model order is selected prior the least squares problem, and in the case that the order chosen is less than the one of the real system, the model retains only the principal components of it. It is proven that it matches the spectral behavior of the larger real system in least-squares sense.

Last, the method is applied to Sigma-Delta modulators, and Multi-Step Look-Ahead ones. In the latter case, there is no closed form input-output mathematical relation proven, due to the inherent nonlinear dynamics of the modulators. Using our method, a relation for the noise transfer function of the modulators is derived. It demonstrates good accuracy and makes use of magnitude data only.

Keywords: System Identification, Model Order Reduction, Modeling, Sigma-Delta Modulators, Nonlinear systems, Recursive Least Squares Method, Vector Fitting, Complex Cepstrum

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Παύλο Σωτηριάδη, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το παρόν ενδιαφέρον θέμα, καθώς και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Χάρη Μπασέτα για τη πολύτιμη βοήθειά του και τις συμβουλές του. Τελειώνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για τη στήριξη, τη βοήθειά τους και τις όμορφες στιγμές που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια, καθώς και την οικογένειά μου που στέκεται δίπλα μου και με υποστηρίζει στις προσπάθειές μου.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
1.1	Ερευνητικό Πρόβλημα-Προσέγγιση	4
1.2	Συνεισφορά εργασίας	5
1.3	Δομή εργασίας	5
2	Ψηφιακοί Διαμορφωτές Σ-Δ	7
2.1	Εισαγωγικές έννοιες	7
2.1.1	Υπερδειγματοληψία	7
2.1.2	Θόρυβος Κβάντισης	8
2.2	Κλασσικοί Σ-Δ Διαμορφωτές	8
2.2.1	Ο Δέλτα Διαμορφωτής	8
2.2.2	Ο Σ-Δ Διαμορφωτής	10
2.3	Ο Multi-Step Look-Ahead Σ-Δ Διαμορφωτής	12
2.3.1	Αλγόριθμος του MSLA διαμορφωτή	12
2.3.2	Ο MSLA σαν σύστημα	14
3	Αλγόριθμοι Μοντελοποίησης	18
3.1	Κλασσικές Μέθοδοι Μοντελοποίησης	18
3.1.1	Γραμμική Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων	19
3.1.2	Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας	19
3.2	Μη Γραμμικές Μέθοδοι Μοντελοποίησης	23
3.2.1	Μη Γραμμική Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων	24
3.2.2	Γραμμικοποίηση μέσω Βαρών	24
3.3	Η Sanathanan-Koerner επαναληπτική μέθοδος	26
3.4	Ο Αλγόριθμος Vector Fitting	30
3.4.1	Το αρχικό μοντέλο	30
3.4.2	Υπολογισμός των νέων πόλων	31
3.4.3	Η επαναληπτική διαδικασία του αλγόριθμου	31
3.4.4	Πρακτική Υλοποίηση του Vector Fitting	34
3.5	Ο Αλγόριθμος z-Domain Vector Fitting	36
4	Μοντελοποίηση Πλάτους	38
4.1	Εντοπισμός Προβλήματος	38
4.2	Η Χιλμπερτιανή σχέση πλάτους και φάσης	39
4.3	Το μιγαδικό και το πραγματικό ανάφασμα	40
5	Μοντελοποίηση Πλάτους στους Multi-Step Look-Ahead Σ-Δ διαμορφωτές	43
5.1	Επισκόπηση της Μεθόδου Μοντελοποίησης Πλάτους	43
5.2	Αποτελέσματα Προσομοίωσης	46
5.2.1	Κλασσικός Σ-Δ διαμορφωτής	46
5.2.2	MSLA Σ-Δ διαμορφωτές	47
6	Συμπερασμάτα και Επεκτάσεις	53

Κατάλογος σχημάτων

1	Σφάλμα κβαντισμού.	8
2	Το σχηματικό διάγραμμα του Δέλτα Διαμορφωτή.	9
3	Το σχηματικό διάγραμμα του Σ-Δ Διαμορφωτή.	10
4	Το πλάτος της NTF.	11
5	Η γενική μορφή ενός 1-bit Σ-Δ διαμορφωτή.	11
6	Ο error-feedback Σ-Δ διαμορφωτής.	13
7	Σχηματικό διάγραμμα για τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους, D.	14
8	Το σχηματικό διάγραμμα του MSLA Σ-Δ διαμορφωτή.	15
9	Το σχηματικό διάγραμμα του MSLA Σ-Δ διαμορφωτή με το προσεγγιστικό μοντέλο για τον θόρυβο κβαντισμού.	16
10	Σύγκριση της ακρίβειας πολυωνικού μοντέλου για $n = 100, 50, 30$, για τη συνάρτηση $\hat{H}(s) = e^{-sT}$	22
11	Το πλάτος των συχνοτηκών δεδομένων, για το Σ-Δ MSLA διαμορφωτή.	38
12	Η ανακρίβεια των αποτελεσμάτων του fitting αλγόριθμου για σταθερή γωνία.	39
13	Minimum phase and all pass deconvolution method	41
14	Ακολουθία φάσης που προκύπτει από το minim-phase and all-pass deconvolution	42
15	Σωστό αποτέλεσμα του αλγόριθμου VF, όταν το dataset περιέχει γωνία που προκύπτει από το minimum phase and all-pass deconvolution.	42
16	Η κατανομή των δειγμάτων ανά τιμές κανονικοποιημένης κυκλικής συχνότητας.	44
17	Διάγραμμα ροής που περιγράφει τη μέθοδο μοντελοποίησης πλάτους.	45
18	Σύγκριση των φασματικών πυκνότητων ισχύος για Σ-Δ διαμορφωτή.	46
19	Σύγκριση των φασματικών πυκνότητων ισχύος για τον MSLA διαμορφωτή, με μοντέλο βαθμού 7.	47
20	Μέσο τετραγωνικό σφάλμα μοντελοποίησης για έναν διαμορφωτή MSLA, για μοντέλα με διαφορετική πολυπλοκότητα.	48
21	Μέσο τετραγωνικό σφάλμα μοντελοποίησης για έναν διαμορφωτή MSLA, για μοντέλα με πολυπλοκότητα μεγαλύτερη από το φίλτρο του.	49
22	Σύγκριση των φασματικών πυκνότητων ισχύος για τον MSLA διαμορφωτή, με μοντέλο βαθμού 8.	50
23	Σύγκριση των φασματικών πυκνότητων ισχύος για τον MSLA διαμορφωτή, με μοντέλο βαθμού 6.	50
24	Μέσο τετραγωνικό σφάλμα μοντελοποίησης για διαμορφωτές MSLA με διαφορετικό αριθμό Look-Ahead steps.	51
25	Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του μοντέλου, καθώς αυξάνονται οι επαναλήψεις του αλγόριθμου.	52

1 Εισαγωγή

Στις μέρες μας υπάρχει η τάση για ψηφιοποίηση των σημάτων προς μετάδοση ή επεξεργασία. Η απλότητα στην επεξεργασία ψηφιακών σημάτων οδηγεί στην πλήρη υπεροχή τους έναντι των αναλογικών. Επιπλέον, στην ανάπτυξη ηλεκτρονικών συστημάτων γίνεται προσπάθεια για τον περιορισμό όσο το δυνατόν περισσότερο των αναλογικών στοιχείων, έτσι ώστε να αποφεύγονται ατέλειες από στοιχεία τα οποία δεν ταιριάζουν μεταξύ τους (mismatching). Η επεξεργασία ενός σήματος ξεκινάει από την μετατροπή του σε ψηφιακό, μέσω ενός κβαντιστή ή διαμορφωτή, και στη συνέχεια το σήμα τροφοδοτείται στο κύκλωμα που εκτελεί την επεξεργασία, το οποίο μπορεί να είναι ένας πυρήνας DSP ή κάποιο ψηφιακό ολοκληρωμένο κύκλωμα. Το επεξεργασμένο σήμα μπορεί να ανακτηθεί από το αρχικό μέσω της τροφοδότησής του σε έναν μετατροπέα από ψηφιακό σε αναλογικό. Όμως, εάν γίνει 1-bit μετατροπή από ψηφιακό σε ψηφιακό μέσω ενός 1-bit διαμορφωτή, τότε χρειάζεται μόνο ένα χαμηλοπερατό φίλτρο για την ανάκτηση του επεξεργασμένου σήματος. Οι διαμορφωτές πολλών bit καθιστούν την ανάκτηση του αναλογικού σήματος δύσκολη, σε σχέση με τους διαμορφωτές 1-bit.

Για αυτόν τον λόγο έχουν προταθεί οι ψηφιακοί Σ-Δ διαμορφωτές που επιτυγχάνουν βελτιωμένες τιμές σηματοθορυβικού λόγου. Στην προσπάθεια για περαιτέρω βελτίωση των διαμορφωτών, αναφορικά με τα όρια ευστάθειάς τους και την καταπίεση του θορύβου τους, προτάθηκε ο 1-bit ψηφιακός Multi-Step Look-Ahead διαμορφωτής, ο οποίος βελτιώνει τα όρια ευστάθειας και ελαχιστοποιεί τον θόρυβο κβάντισης στην έξοδό του, σε σχέση με τους κλασσικούς διαμορφωτές.

Η χρησιμοποίηση των Multi-Step Look-Ahead διαμορφωτών, καθώς και οιαδήποτε άλλου ηλεκτρονικού στοιχείου, σε εφαρμογές όπως ψηφιακούς πομπούς, καθώς και σε άλλες εφαρμογές τους απαιτεί τη σχεδίαση και εξομοίωση του συνολικού συστήματος. Επιπλέον, το σύνολο του συστήματος θα πρέπει μετά την εξομοίωση να αναλυθεί ως προς την απόδοσή του και το κόστος του και να ληφθούν αποφάσεις σχετικά με τον επανασχεδιασμό του. Ακόμα, μια επιπλέον παράμετρος που θα πρέπει να λάβουμε υπόψη είναι η ευκολία στην προσομοίωση, και οι υπολογιστικοί πόροι που χρειάζονται.

Για τον επιτυχημένο σχεδιασμό συστημάτων, καθώς και την εύκολη και οικονομική προσομοίωσή τους έχουν αναπτυχθεί οι κλάδοι της αναγνώρισης συστημάτων (system identification), μοντελοποίησης (modeling), και απλοποίησης της πολυπλοκότητας του μοντέλου (model order reduction).

Βασική ιδέα του system identification και της μοντελοποίησης είναι η εξαγωγή ενός μοντέλου- συνάρτησης μεταφοράς, η οποία θα μοιάζει όσο το δυνατόν περισσότερο -ή θα ταυτίζεται- με ένα άγνωστο και πραγματικό σύστημα. Το μοντέλο που εξάγεται είναι αποτέλεσμα μιας μεθόδου κατά την οποία ένα σύνολο από δεδομένα, προσεκτικά καθορισμένα, χρησιμοποιούνται για να λυθούν γραμμικά ή και μη γραμμικά συστήματα παρεμβολής. Συνηθισμένες μέθοδοι για την εξεύρεση μοντέλων για συστήματα αποτελεί η διέγερση του συστήματος με προκαθορισμένη είσοδο, η οποία θα έχει επιλεγεί έτσι ώστε η έξοδός του να παρουσιάζει όσο το δυνατόν πιο μεγάλο μέρος από τη δυναμική του συστήματος. Έπειτα οι ακολουθίες εισόδου και εξόδου χρησιμοποιούνται έτσι ώστε να βρεθεί η σχέση που τις συνδέει και εκφράζει το σύστημα. Σε περιπτώσεις με μη γραμμικότητες, η συγκεκριμένη μέθοδος δεν μπορεί να

εφαρμοστεί και επιλέγουμε περίπλοκες λύσεις [1].

Ο κλάδος του model order reduction επιδιώκει να εκφράσει ένα γνωστό ή άγνωστο σύστημα με ένα μοντέλο περιορισμένου αριθμού παραμέτρων, έτσι ώστε να μειώσει την πολυπλοκότητά του ενώ παράλληλα διατηρεί όσο το δυνατόν περισσότερη δυναμική από το αρχικό. Ηλεκτρονικά συστήματα που περιέχουν ένα μεγάλο αριθμό από στοιχεία, όπως εκτυπωμένες πλακέτες, μπορούν να εκφραστούν με ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο προκύπτει από τις εξισώσεις του Maxwell, έπειτα αυτές μετατρέπονται σε αντίστοιχες στον διακριτό χρόνο μέσω της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων και λύνονται σε ένα δίκτυο από γράφους. Το δίκτυο από γράφους μπορεί να είναι πολύ μεγάλο και να απαιτεί αρκετό υπολογιστικό χρόνο, καθώς προκύπτει αυτόματα από εμπορικό λογισμικό προσομοίωσης κυκλωμάτων. Η εξεύρεση ενός μοντέλου που θα απλοποιεί την μαθηματική έκφραση της λειτουργίας των κυκλωμάτων θα βοηθήσει στην εύκολη προσομοίωση της πλακέτας και επιτυγχάνεται με εφαρμογή μεθόδων model order reduction.

1.1 Ερευνητικό Πρόβλημα-Προσέγγιση

Το βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε κατά την εφαρμοσμένη χρήση των MSLA Σ - Δ διαμορφωτών είναι η εξεύρεση ενός γραμμικού μοντέλου που εκφράζει τη δυναμική του συστήματος και μοντελοποιεί την επιρροή που έχει αυτό στον θόρυβο εξόδου του διαμορφωτή. Στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα, όπου οι Σ - Δ διαμορφωτές χρησιμοποιούνται κατά κόρον [2], οι δέκτες και οι πομποί εμπεριέχουν ένα σύνολο από γραμμικά στοιχεία. Συνεπώς, η εξεύρεση ενός προσεγγιστικού γραμμικού μοντέλου για τον MSLA, έτσι ώστε το σύνολο του συστήματος να είναι και αυτό γραμμικό, αποτελεί το στόχο μας.

Ακόμα, η πολυπλοκότητα του MSLA καθιστά ακόμα και την εξεύρεση μη γραμμικών σχέσεων εισόδου-εξόδου κλειστής μορφής εξαιρετικά δύσκολη, ιδιαίτερα για διαμορφωτές MSLA με φίλτρα μεγάλου βαθμού. Συνεπώς, εκτός της μη γραμμικότητας, η εξισώσεις που χαρακτηρίζουν μια συγκεκριμένη υλοποίηση του MSLA είναι άγνωστες.

Η προσέγγιση στα παραπάνω θέματα περιλαμβάνει την προσομοίωση του MSLA Σ - Δ διαμορφωτή για διάφορες υλοποιήσεις του, και η χρησιμοποίηση τεχνικών system identification για την εξεύρεση ενός γραμμικού μοντέλου που θα τον αναπαραστήσει. Όντας ένα ψηφιακό, 1-bit και μη γραμμικό σύστημα, οι συμβατικές τεχνικές system identification για τον MSLA στο πεδίο του χρόνου αποτυγχάνουν. Ο κλάδος του system identification δεν μπορεί να μοντελοποιήσει ακόμα δυαδικά συστήματα με ισχυρές μη γραμμικότητες.

Για τους παραπάνω λόγους, μια προσέγγιση στο ζήτημα είναι η ανάλυση της συμπεριφοράς των MSLA διαμορφωτών στο πεδίο της συχνότητας και η εξεύρεση μοντέλων που είναι γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα και παρουσιάζουν το ίδιο πλάτος στην έξοδό τους, όταν τροφοδοτούνται με μια συγκεκριμένη είσοδο. Η παραδοχή ότι το μοντέλο των MSLA χρειάζεται να παρουσιάζει μόνο ίδιο πλάτος και όχι απαραίτητα ίδια απόκριση φάσης απλοποιεί τα θέματα για το identification του, ενώ παράλληλα είναι ικανή συνθήκη για την σωστή αναπαράστασή του, καθώς το σημείο ενδιαφέροντος για τον MSLA δεν είναι άλλο από την ποσότητα θορύβου στο φάσμα της εξόδου, κάτι το οποίο εξαρτάται αποκλειστικά από το πλάτος του συστήματος, και όχι τη γωνία

του.

1.2 Συνεισφορά εργασίας

Η εργασία αυτή παρουσιάζει μια νέα μέθοδο για μοντελοποίηση συστημάτων, βασισμένη στην απόκριση πλάτους τους. Συγκεκριμένα, με αφετηρία το πρόβλημα μοντελοποίησης του MSLA διαμορφωτή, αναπτύχθηκε μια νέα μέθοδος κατά την οποία το άγνωστο σύστημα διεγείρεται απο μια είσοδο, και η έξοδος χρησιμοποιείται για εξαγωγή ορισμένων συχνοτικών χαρακτηριστικών. Η χρήση της μεθόδου minimum-phase and all-pass deconvolution οδηγεί στην απομόνωση της απόκρισης πλάτους, η οποία εμπλουτίζεται με μια αυθαίρετη ακολουθία φάσης και σχηματίζεται μια ισοδύναμη συχνοτική απόκριση για το σύστημα. Έπειτα, μέσω της μεθόδου για μοντελοποίηση συστημάτων, Vector Fitting, βρίσκουμε ένα ισοδύναμο μοντέλο με το αρχικό σύστημα, χρησιμοποιώντας ως δεδομένα τα στοιχεία της ισοδύναμης απόκρισης.

Η νέα διαδικασία για μοντελοποίηση αποτελείται από δύο βήματα και υπερτερεί σε σχέση με τις απλές τεχνικές μοντελοποίησης σε σχέση με την απόδοσή της σε συστήματα με μη-γραμμικότητες. Επιπλέον, η εργασία προτείνει τροποποιήσεις του κλασικού αλγόριθμου Vector Fitting ώστε να απλοποιεί τα διακριτού χρόνου μοντέλα, κάνοντας model order reduction παράλληλα με την μοντελοποίηση.

Αναφορικά με την εφαρμογή της τεχνικής στους διαμορφωτές MSLA, τα μοντέλα που προκύπτουν αποτελούν ορισμό των MSLA στο πεδίο που είναι αυτοί ευσταθείς, και παρέχουν ένα ακριβές γραμμικό μοντέλο, γεγονός που διευκολύνει τη χρήση του σαν υποσύνολο σε πρακτικές εφαρμογές.

1.3 Δομή εργασίας

Ακολουθεί μια σύνοψη των κεφαλαίων της εργασίας:

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύουμε τους ψηφιακούς διαμορφωτές Σ-Δ. Αρχικά περιγράφουμε τις βασικές έννοιες της υπερδειγματοληψίας και του θορύβου κβάντισης, στοιχεία που προκύπτουν συχνά στην θεωρητική ανάλυση των διαμορφωτών Σ-Δ. Στη συνέχεια, αναφέρονται βασικές τοπολογίες διαμορφωτών και γίνεται σύγκριση μεταξύ των επιδόσεών τους. Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται οι ψηφιακοί διαμορφωτές Multi-Step Look-Ahead Σ-Δ, για τους οποίους αναφέρουμε τα βασικά θεωρητικά χαρακτηριστικά και υπογραμμίζουμε τα στοιχεία που καθιστούν την μοντελοποίησή τους δύσκολη.

Το τρίτο κεφάλαιο εξετάζει αλγόριθμους μοντελοποίησης. Η ανάλυση ξεκινά από γραμμικά προβλήματα και συνεχίζει στην επίλυση του μη γραμμικού συστήματος ελαχίστων τετραγώνων με διαφορετικούς τρόπους. Προοδευτικά, καταλήγει στη βέλτιστη λύση της επαναληπτικής μεθόδου Vector Fitting, η οποία γραμμικοποιεί το μη γραμμικό σύστημα μέσω της επιβολής μια συνάρτησης βάρους και των επαναλήψεών της. Ο αλγόριθμος Vector Fitting αναλύεται στη μορφή που ανταποκρίνεται σε συνεχούς χρόνου συστήματα, και έπειτα αναφέρονται οι διαφοροποιήσεις που γίνονται ώστε να μπορεί να λειτουργήσει και για συστήματα διακριτού χρόνου.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετούμε το πρόβλημα τροποποίησης των συχνοτικών δεδομένων του συστήματος προς μοντελοποίηση, ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες

για μοντελοποίηση πλάτους. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός του πλάτους του συστήματος με τυχαίες και γραμμικά μεταβαλλόμενες ακολουθίες φάσης οδηγούν σε δεδομένα για τα οποία ο αλγόριθμος μοντελοποίησης αποτυγχάνει. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η σχέση της γωνίας και του πλάτους για ένα αιτιατό σύστημα, μέσω ενός διακριτού μετασχηματισμού Hilbert. Παρουσιάζεται, ακόμα, ότι η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί μέσω της διαδικασίας minimum-phase and all-pass deconvolution για να αποκτήσουμε μια ακολουθία φάσης η οποία όταν συνδυάζεται με το πλάτος οδηγεί σε επιτυχή εκτέλεση του αλγόριθμου μοντελοποίησης Vector Fitting.

Το πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζει την εφαρμογή της μεθόδου για την μοντελοποίηση του Multi-Step Look-Ahead Σ - Δ διαμορφωτή. Αρχικά γίνεται μια επισκόπηση της μεθόδου και παρουσιάζονται ορισμένα πρακτικά στοιχεία για την υλοποίησή της. Στην συνέχεια παρουσιάζονται αποτελέσματα προσομοίωσης για διάφορες υλοποιήσεις των διαμορφωτών Σ - Δ και Multi-Step Look-Ahead Σ - Δ , και γίνεται σύγκριση μοντέλων διαφορετικής πολυπλοκότητας για τον ίδιο διαμορφωτή. Σχολιάζεται, ακόμα, η αποδοτικότητα της μεθόδου καθώς και της υλοποίησής της τόσο αναφορικά με την ακρίβειά της, όσο και με την υπολογιστική της πολυπλοκότητα.

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο αναφέρουμε τα συμπεράσματά μας από την εφαρμογή της μεθόδου στους Σ - Δ διαμορφωτές και περιγράφουμε έναν αριθμό μελλοντικών επεκτάσεων για την βελτίωση της απόδοσής της και την αξιοποίηση της και σε περαιτέρω εφαρμογές.

2 Ψηφιακοί Διαμορφωτές Σ-Δ

Η παρακάτω ανάλυση αφορά τους μετατροπείς από ψηφιακό σε ψηφιακό σήμα (Digital to Digital Converters, DDC). Παρόμοια ανάλυση μπορεί να γίνει και για τους διαμορφωτές από αναλογικό σε ψηφιακό σήμα (ADCs), με ορισμένες διαφορές που προκύπτουν από το διαφορετικό τύπο εισόδου.

2.1 Εισαγωγικές έννοιες

Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε μερικές βασικές έννοιες για την ανάλυση των Σ-Δ διαμορφωτών. Οι Σ-Δ διαμορφωτές είναι ηλεκτρονικά κυκλώματα που εκμεταλλεύονται την υπερδειγματοληψία (oversampling), για να μπορέσουν να αναπαραστήσουν ένα σήμα με ένα ή μερικά bits ανά δείγμα. Το βασικό τους πλεονέκτημα είναι ότι μπορούν να περιορίσουν την εισαγωγή θορύβου κβάντισης στο εύρος συχνοτήτων του σήματος εισόδου, σε σχέση με αντίστοιχους διαμορφωτές [3]. Παρακάτω θα αναλύσουμε την υπερδειγματοληψία και τον θόρυβο κβάντισης, πριν συνεχίσουμε στην ανάλυση των διαμορφωτών.

2.1.1 Υπερδειγματοληψία

Η υπερδειγματοληψία είναι μια διαδικασία κατά την οποία η δειγματοληψία ενός σήματος γίνεται με πολύ μεγαλύτερο ρυθμό από αυτόν που επιβάλλει ο κανόνας του Nyquist, $f_s = 2f_B$, όπου f_B είναι το εύρος του σήματος και f_s η συχνότητα δειγματοληψίας. Μπορούμε, πλέον, να ορίσουμε τον λόγο υπερδειγματοληψίας (Oversampling Ratio, OSR), ως εξής:

$$OSR = \frac{f_s}{2f_B}. \quad (1)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι το σήμα εισόδου είναι ένα ημίτονο, με πλάτος A και συχνότητα f_B . Το σήμα που θα προκύψει μετά την υπερδειγματοληψία θα έχει συχνότητα f_B/f_s . Συγκεκριμένα,

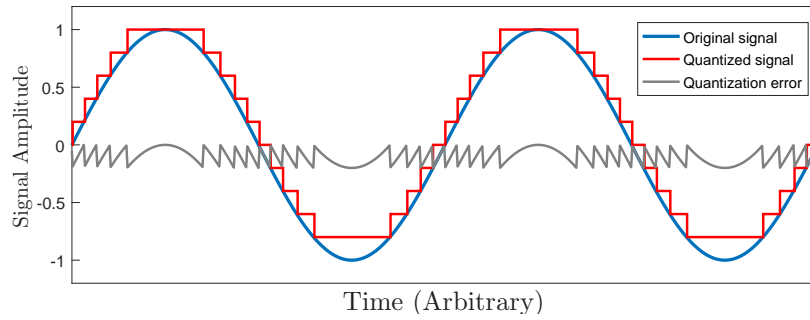
$$x = A \sin(2\pi f_B t) \quad (2)$$

$$x_s = A \sin\left(2\pi \frac{f_B}{f_s} n\right) = A \sin\left(\frac{\pi}{OSR} n\right). \quad (3)$$

Η συχνότητα δηλαδή του σήματος μετά τη δειγματοληψία είναι

$$\Omega = \frac{\pi}{OSR}.$$

Προφανώς, η συχνότητα του σήματος μετά τη δειγματοληψία εξαρτάται από το OSR. Καθώς το OSR αυξάνει, η συχνότητα Ω μειώνεται και η αρχική πληροφορία συμπυκνώνεται σε ένα σχετικά μικρό, βαθυπερατό συχνοτικό εύρος. Σε πρακτικές εφαρμογές, η δειγματοληψία με υψηλά OSR έχει περιορισμούς, καθώς όταν η συχνότητα του σήματος είναι υψηλή, θα πρέπει η συχνότητα δειγματοληψίας να φθάνει σε δυσθεώρητα μεγέθη.



Σχήμα 1: Σφάλμα κβαντισμού.

2.1.2 Θόρυβος Κβάντισης

Η αναπαράσταση ενός σήματος με ένα ή λιγότερα bits περιλαμβάνει δύο στάδια, την δειγματοληψία του και τον κβαντισμό του πλάτους του ώστε το τελικό σήμα να λαμβάνει τιμές που ανήκουν σε ένα σύνολο με πεπερασμένα στοιχεία. η κβάντιση είναι συνήθως ομοιόμορφη, δηλαδή δύο γειτονικά επίπεδα κβάντισης ισαπέχουν σταθερή απόσταση Δ . Ο κβαντιστής είναι το σύστημα που πραγματοποιεί τη κβάντιση και ορίζεται πλήρως από την σχέση εισόδου-εξόδου του. Η έξοδος του κβαντιστή, όμως, διαφέρει από την είσοδό του, και αυτή η απόκλιση ονομάζεται σφάλμα κβαντισμού. Στο σχήμα 1 φαίνεται ένα ψηφιακό σήμα και το ίδιο σήμα κβαντισμένο, καθώς και το σφάλμα ανάμεσά τους. Στο σφάλμα, που είναι ευδιάκριτο στο σχήμα, οφείλεται η μη ιδανικές ιδιότητες του κβαντιστή.

Ο ιδανικός κβαντιστής είναι ντετερμινιστική συσκευή, δηλαδή το σφάλμα κβάντισης e καθορίζεται πλήρως από την είσοδο y . Όμως, εάν η είσοδος αλλάζει σημαντικά από δείγμα σε δείγμα, είναι επιτρεπτό να υποθέσουμε ότι το σφάλμα κβαντισμού e είναι λευκός θόρυβος με δείγματα κατανομημένα ομοιόμορφα μεταξύ των τιμών $-\Delta/2$ και $\Delta/2$. Από αυτή την υπόθεση, είναι εύκολο να συμπαράνουμε ότι η διακύμανση του λευκού θορύβου θα είναι $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$. Θα αναφερθούμε σε αυτό και παρακάτω στο κεφάλαιο.

Σαν ένα μέτρο σύγκρισης της αποδοτικότητας μεταξύ κβαντιστών, για το ημιτονικό σήμα που θεωρήσαμε νωρίτερα, μπορούμε να ορίσουμε τον λόγο μεταξύ ενέργειας σήματος και θορύβου κβάντισης, signal-to-quantization-noise ratio (SQNR), ως

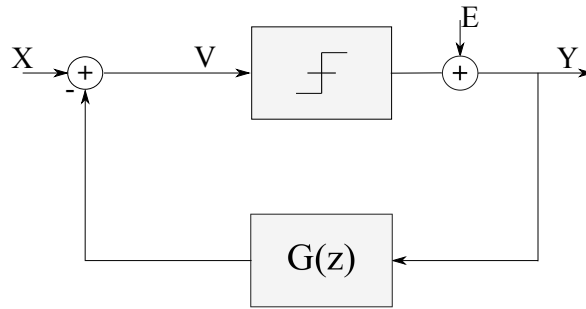
$$SQNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{9A^2(OSR)^3}{2\pi^2}. \quad (4)$$

Ουσιαστικά, το SQNR αποτελεί μία ειδική περίπτωση του μετρικού SNR για εφαρμογές σε ψηφιακές κωδικοποιήσεις.

2.2 Κλασσικοί Σ-Δ Διαμορφωτές

2.2.1 Ο Δέλτα Διαμορφωτής

Η εισαγωγή στους διαμορφωτές Σ-Δ ξεκινά με την ανάλυση της βασικής τους τοπολογίας. Οι διαμορφωτές μπορούν να περιέχουν αρκετά στάδια στην ολοκληρωμένη



Σχήμα 2: Το σχηματικό διάγραμμα του Δέλτα Διαμορφωτή.

τους μορφή. Αναλογικά ή ψηφιακά φίλτρα χρησιμοποιούνται πριν ή μετά το στάδιο το οποίο πραγματοποιεί την μετατροπή του σήματος, από αναλογικά σε ψηφιακό ή ψηφιακό σε ψηφιακό. Οι δύο βασικοί τύποι τοπολογίας των διαμορφωτών αυτών είναι ο Δέλτα διαμορφωτής και ο Σ-Δ διαμορφωτής. Το σχηματικό διάγραμμα του Δέλτα διαμορφωτή εικονίζεται στο σχήμα 2. Πρόκειται για ένα σύστημα με ανάδραση, που περιέχει τον μη γραμμικό κβαντιστή και ένα φίλτρο, συνήθως ολοκληρωτή. Η μαθηματική ανάλυσή του είναι δύσκολη, κυρίως λόγω της μη-γραμμικότητας που εισάγει ο κβαντιστής. Για την ανάλυσή του, θεωρούμε ότι εισέρχεται πρόσθετος θόρυβος κβαντισμού e . Με απλή ανάλυση μπορεί να αποδειχτεί ότι η έξοδός του σε τυχαία χρονική στιγμή n είναι ίση με

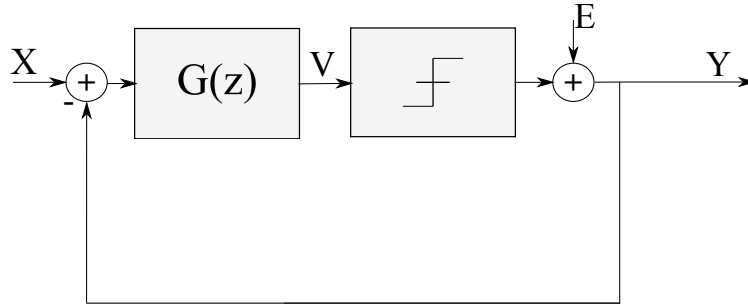
$$y(n) = x(n) - x(n-1) + e(n) - e(n-1). \quad (5)$$

Το όνομα του διαμορφωτή οφείλεται στο ότι η έξοδός του είναι η διαφορά (delta) ανάμεσα σε μια τιμή εισόδου του διαμορφωτή και σε μια πρόβλεψη για την τιμή αυτή. Το πλεονέκτημα αυτής της τοπολογίας είναι ότι για σήματα τα οποία έχουν υποστεί δειγματοληψία σε πολύ μεγαλύτερο ρυθμό από αυτόν που επιβάλλει ο Nyquist, η διαφορά $u(n) - u(n-1)$ είναι πολύ μικρότερη από το ίδιο το $u(n)$, με αποτέλεσμα να το επιτρεπτό εύρος εισόδων του διαμορφωτή να αυξάνεται. Στα μειονεκτήματά του συμπεριλαμβάνεται η θέση του φίλτρου στο κλάδο ανάδρασης, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα να περιορίζεται η γραμμικοποίηση του συστήματος. Το φίλτρο έχει υψηλό κέρδος στην περιοχή συχνοτήτων του σήματος που μας ενδιαφέρει, και έτσι μπορεί να μεγεθύνει τα τον θόρυβο που εισέρχεται από τον κβαντιστή. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό εάν εξετάσουμε και τις εξισώσεις μεταφοράς στο πεδίο z ,

$$Y(z) = X(z) - G(z)Y(z) + E(z) \quad (6)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1+G(z)}X(z) + \frac{1}{1+G(z)}E(z). \quad (7)$$

Ορίζουμε σαν STF τη συνάρτηση μεταφοράς από την είσοδο στην έξοδο και NTF τη συνάρτηση μεταφοράς από την θεωρητική είσοδο θορύβου στην έξοδο, και παρατηρούμε ότι και οι δύο είναι ίσες με $NTF + STF + 1/(1+G(z))$. Συνεπώς, το σήμα εισόδου και ο θόρυβος εισόδου υπόκεινται στο ίδιο φίλτρο, άρα και στην ίδια κλιμάκωση, γεγονός μη επιθυμητό.



Σχήμα 3: Το σχηματικό διάγραμμα του Σ-Δ Διαμορφωτή.

2.2.2 Ο Σ-Δ Διαμορφωτής

Ιδανικά, οι συναρτήσεις μεταφοράς του διαμορφωτή θα θέλαμε να ενισχύουν το σήμα και να μην επιτρέπουν στο θόρυβο κβάντισης να επηρεάσει την έξοδο. Αυτό ως ένα βαθμό μπορεί να επιτευχθεί με τους Σ-Δ διαμορφωτές, των οποίων το σχηματικό διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα 3. Πρόκειται πάλι για ένα σύστημα με ανάδραση, αλλά σε αυτή την περίπτωση το φίλτρο τοποθετείται στον ευθύ κλάδο. Η ανάλυση του συστήματος μας οδηγεί στην παρακάτω σχέση

$$Y(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}X(z) + \frac{1}{1 + G(z)}E(z). \quad (8)$$

Στο πεδίο του χρόνου, η έξοδος σε τυχαία στιγμή n δίνεται από

$$y(n) = x(n - 1) + e(n) - e(n - 1). \quad (9)$$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι ο διαμορφωτής ΣΔ είναι ισοδύναμος με ένα Δέλτα διαμορφωτή, εάν προσθέσουμε έναν αθροιστή στην τοπολογία του δεύτερου.

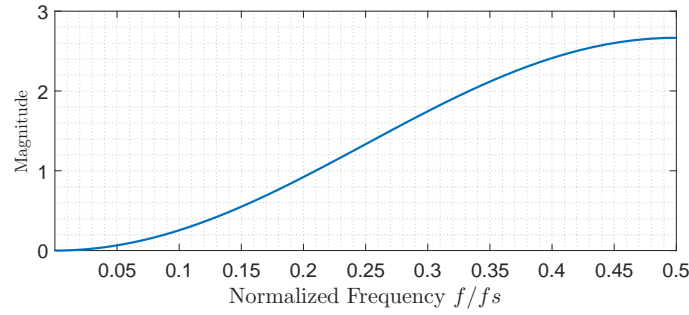
Παρατηρούμε ότι πλέον οι STF και NTF διαφέρουν μεταξύ τους. Για τα παρακάτω θεωρούμε ότι το φίλτρο είναι ένας ολοκληρωτής, δηλαδή $G(z) = 1/(z-1)$. Εάν εστιάσουμε στην NTF στο πεδίο των συχνοτήτων, και αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή z με $e^{j2\pi fT}$, η φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου εξόδου υπολογίζεται ως

$$S_q(f) = (2\sin(\pi fT))^2 S_e(f). \quad (10)$$

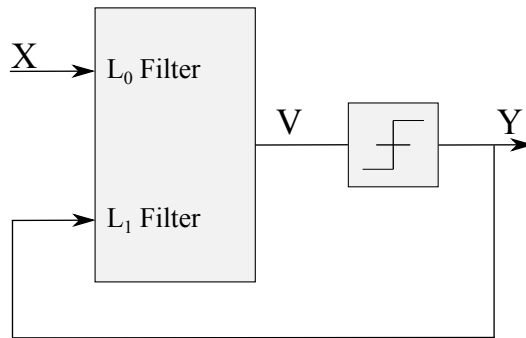
Η μεταβλητή $T = 1/f_s$ είναι η περίοδος δειγματοληψίας, και $S_e(f)$ είναι η μονόπλευρη φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου κβάντισης. Για τους περισσότερους διαμορφωτές, ο θόρυβος κβάντισης μπορεί να προσεγγιστεί με αρκετά καλή ακρίβεια ως λευκός θόρυβος με μέση τετραγωνική τιμή $e_{rms}^2 = \Delta^2/12$, όπου Δ είναι το βήμα του κβαντιστή, και έτσι

$$S_e(f) = \frac{\Delta^2}{6f_s}. \quad (11)$$

Το πλάτος της συνάρτησης αυτής φαίνεται στο σχήμα 4. Παρατηρούμε η NTF είναι ένα υπερηρατό φίλτρο, το οποίο κόβει τον θόρυβο στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων. Έτσι, για σήματα τα οποία έχουν υποστεί υπερδειγματοληψία και έχουν



Σχήμα 4: Το πλάτος της NTF.



Σχήμα 5: Η γενική μορφή ενός 1-bit Σ-Δ διαμορφωτή.

μετακινηθεί στις χαμηλές συχνότητες, η συγκεκριμένη τοπολογία αποτελεί εξαιρετική λύση, καθώς ωθεί την ισχύ του θορύβου κβάντισης στις υψηλές συχνότητες που δεν μας ενδιαφέρουν. Για ένα μέτρο σύγκρισης, μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη φασματική πυκνότητα θορύβου μεταξύ 0 και f_B , όπου δηλαδή της εύρους του σήματος εισόδου. Προκύπτει η ισχύς του θορύβου στο συχνοτικό εύρος του σήματος εισόδου και είναι ίση με

$$q_{rms}^2 = \frac{\pi^2 e_{rms}^2}{3(OSR)^3}. \quad (12)$$

Βλέπουμε ότι καθώς το σήμα εισόδου δειγματοληπτείται με μεγαλύτερη συχνότητα, δηλαδή έχει μεγαλύτερο OSR, ο θόρυβος μειώνεται. Αυτό το χαρακτηριστικό των Σ-Δ διαμορφωτών λέγεται απώθηση θορύβου (noise shaping) και είναι η ουσιαστική διαφορά τους από τους κλασσικούς διαμορφωτές. Ο σχεδιαστής, ανάλογα με το noise-shaping που χρειάζεται, μπορεί να σχεδιάσει έναν διαμορφωτή με αντίστοιχη NTF [4].

Η γενική δομή ενός 1-bit Σ-Δ διαμορφωτή, οποιασδήποτε τάξης φαίνεται στο σχήμα 5. Ο διαμορφωτής χωρίζεται σε δύο τμήματα, το γραμμικό κομμάτι του το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία μνήμης που απαιτούνται, και το μη γραμμικό κομμάτι του, το οποίο αποτελεί ο κβαντιστής. Ο στόχος μας είναι να εκφράσουμε την έξοδο του κβαντιστή, Y , ως συνάρτηση της εισόδου και του επιπρόσθετου θορύβου. Το φίλτρο με δύο εισόδους έχει μία έξοδο, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως

$$V(z) = L_0(z)X(z) + L_1(z)Y(z). \quad (13)$$

Η λειτουργία του κβαντιστή μπορεί να εκφραστεί ως

$$Y(z) = V(z) + E(z). \quad (14)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις δύο εξισώσεις, η έξοδος του διαμορφωτή μπορεί να γραφτεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός της εισόδου και του επιπρόσθετου θορύβου,

$$Y(z) = STF(z)X(z) + NTF(z)E(z), \quad (15)$$

όπου

$$NTF(z) = \frac{1}{1 - L_1(z)}, \quad STF(z) = \frac{L_0(z)}{1 - L_1(z)}. \quad (16)$$

Αντίστροφα, με δεδομένες τις επιθυμητές NTF και STF για έναν διαμορφωτή, μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς των φίλτρων ως εξής:

$$L_0(z) = \frac{STF(z)}{NTF(z)}, \quad L_1(z) = 1 - \frac{1}{NTF(z)}. \quad (17)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν ανεξάρτητα από τη δομή του φίλτρου, και έτσι η συμπεριφορά του διαμορφωτή Σ-Δ καθορίζεται πλήρως από τις συναρτήσεις μεταφοράς NTF, STF και τις ιδιότητες του κβαντιστή [5].

2.3 Ο Multi-Step Look-Ahead Σ-Δ Διαμορφωτής

Οι Multi-Step Look-Ahead (MSLA) Σ-Δ διαμορφωτές έχουν προταθεί [6] αντί των συμβατικών διαμορφωτών Σ-Δ, καθώς παρουσιάζουν καλύτερα χαρακτηριστικά noise-shaping και έχουν καλύτερα όρια ευστάθειας από αυτούς. Οι MSLA Σ-Δ διαμορφωτές αποτελούν μέρος της κατηγορίας των Look-Ahead Σ-Δ, όμως η υλοποίησή τους σε hardware είναι σαφώς πιο οικονομική, για παρόμοιες τιμές SNR [7]. Όμως, η ανάλυσή τους είναι αρκετά πολύπλοκη σε σχέση με τους κλασσικούς Σ-Δ διαμορφωτές, αφού αποτελούνται από πολλούς κλάδους ανατροφοδότησης, με έναν κοινό 1-bit κβαντιστή πολλών εισόδων. Παρακάτω αναλύουμε τη βασική ιδέα των MSLA Σ-Δ διαμορφωτών.

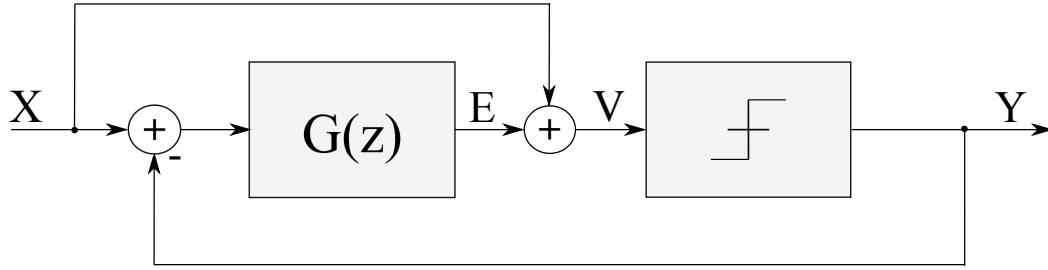
2.3.1 Αλγόριθμος του MSLA διαμορφωτή

Όπως και οι υπόλοιποι Look-Ahead Σ-Δ διαμορφωτές, έτσι και ο MSLA διαμορφωτής προέρχεται από τους συμβατικούς Σ-Δ, εάν τους ερμηνεύσουμε σαν πρόβλημα βελτιστοποίησης [8].

Πιο συγκεκριμένα, ο MSLA Σ-Δ διαμορφωτής βασίζεται στη τοπολογία του διαμορφωτή σφάλματος-ανάδρασης (error-feedback modulator), ο οποίος παράγει μια ακολουθία από 1-bit εξόδους με το ελάχιστο δυνατό σφάλμα, όταν ένα φίλτρο πρώτης τάξης χρησιμοποιείται.

Η ανάλυση του error-feedback Σ-Δ διαμορφωτή είναι εύκολη, εάν θεωρήσουμε το σχηματικό του διάγραμμα στο σχήμα 6. Παρατηρούμε ότι

$$V(z) = X(z) + G(z)(X(z) - Y(z)), \quad (18)$$



Σχήμα 6: Ο error-feedback Σ-Δ διαμορφωτής.

όπου $X(z)$, $Y(z)$ και $V(z)$ είναι οι μετασχηματισμοί z των ακολουθιών εισόδου, εξόδου και εισόδου του κβαντιστή. Το σφάλμα κβάντισης ορίζεται ως $N(z) = Y(z) - V(z)$, το οποίο όταν συνδυαστεί με τη σχέση 18 μας δίνει

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{1 + G(z)}N(z).$$

Έτσι, ορίζονται οι συναρτήσεις $STF(z) = 1$ και $NTF(z) = 1/(1 + G(z))$. Το φίλτρο $G(z)$ μπορεί να υπολογιστεί ως

$$G(z) = \frac{1 - NTF(z)}{NTF(z)} = \frac{\sum_{i=1}^l b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^m a_i z^{-i}}, \quad (19)$$

όπου l, m είναι οι βαθμοί του αριθμητή και του παρονομαστή αντίστοιχα.

Έχει αποδειχτεί ότι ο error-feedback Σ-Δ διαμορφωτής είναι ισοδύναμος με έναν αλγόριθμο βελτιστοποίησης, και η έξοδος του καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους

$$S_{0,n}(v) = |x_n + e_n - v|,$$

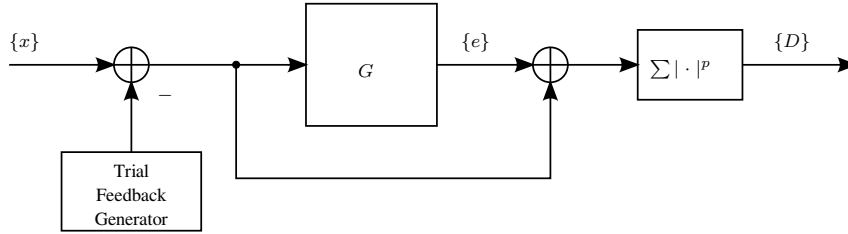
με x_n την είσοδο, e_n την έξοδο του φίλτρου G και v την μεταβλητή που χρησιμοποιούμε για την ελαχιστοποίηση, με $v \in \{\pm 1\}$. Η έξοδος του error-feedback διαμορφωτή ισούται με

$$y_n = \text{sgn}(e_n + x_n),$$

και υπολογίζεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιεί μόνο το στιγμιαίο σφάλμα κβάντισης.

Ο MSLA διαμορφωτής αποτελεί μια γενίκευση σε αυτό το πλαίσιο, καθώς η ελαχιστοποίηση του σφάλματος κβάντισης δεν περιορίζεται μόνο στο παρόν δείγμα x_n , αλλά περιλαμβάνει και τα επόμενα k δείγματα εισόδου. Τα δείγματα αυτά δεν προβλέπονται αλλά προφανώς υπάρχει μια καθυστέρηση μέσω buffer στην είσοδο του συστήματος.

Η βασική ιδέα είναι να αναζητήσουμε ανάμεσα στις 2^{k+1} πιθανές ακολουθίες εξόδους του διαμορφωτή και να επιλέξουμε αυτή με την λιγότερη ισχύ θορύβου κβάντισης. Τότε, το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας εξόδου επιλέγεται ως έξοδος του διαμορφωτή. Για τον MSLA, το πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να φανεί στο σχήμα 7.



Σχήμα 7: Σχηματικό διάγραμμα για τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους, D .

Η εξίσωση που περιγράφει τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης είναι:

$$y_n = \arg \min_{v_0 \in \{\pm 1\}} \left(\min_{v_1, v_2, \dots, v_k \in \{\pm 1\}} \sum_{j=k-r}^k |x_{n+j} + e_{n+j} - v_j|^p \right), \quad (20)$$

όπου $\{x\}$ είναι η ακολουθία εισόδου και τα διακριτά δείγματα δηλώνονται με x_n , ενώ $\{u\}$ είναι μια ακολουθία ανάδρασης (u_0, u_1, \dots, u_k) με στοιχεία $u_i \in \{\pm 1\}$, ενώ k είναι ο αριθμός των Look-Ahead βημάτων. Για κάθε πιθανή ακολουθία ανάδρασης $\{u\}$ υπολογίζεται η συνάρτηση κόστους D ,

$$D = \sum_{j=k-r}^k |x_{n+j} + e_{n+j} - v_j|^p. \quad (21)$$

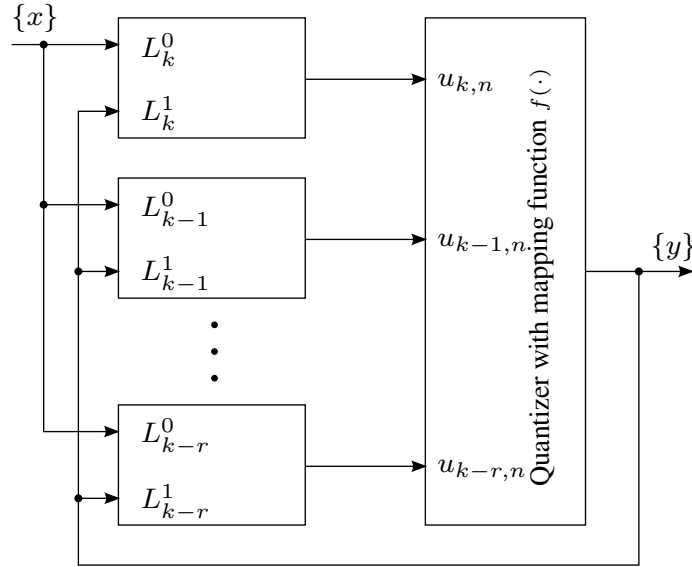
Η τιμή του u_0 που αντιστοιχεί στην ακολουθία με το ελάχιστο κόστος, επιλέγεται ως έξοδος του διαμορφωτή. Η ακολουθία $\{e\}$ και τα διακριτά δείγματά της e_n αποτελούν την έξοδο του φίλτρου G . Η NTF σχετίζεται με το comparison filter μέσω της σχέσης

$$G(z) = \frac{1 - NTF(z)}{NTF(z)} = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^m a_i z^{-i}}. \quad (22)$$

Ο αριθμός από τα επιμέρους κόστη που λαμβάνονται υπόψη από τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης είναι r . Επιπλέον, η παράμετρος p , η οποία λαμβάνει τιμές μεταξύ 2 και 1, χρησιμοποιείται για να διαλέξουμε μεταξύ Ευκλείδειας και Manhattan νόρμας για τη συνάρτηση κόστους. Αποδεικνύεται ότι η υλοποίηση των MSLA Σ-Δ με χρήση Manhattan νόρμας οδηγεί σε απλούστερη hardware υλοποίηση, με το κόστος 2-3 db χαμηλότερο SNR σε σχέση με την υλοποίηση της Ευκλείδειας νόρμας.

2.3.2 Ο MSLA σαν σύστημα

Η επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης του MSLA στη σχέση 20 απαιτεί τον υπολογισμό 2^{k+1} τιμών κόστους σε κάθε χρονικό σημείο. Να σημειώσουμε επίσης ότι η συνάρτηση κόστους εξαρτάται από τη χρονική στιγμή n , δηλαδή $D = D_n$. Μια πιο αποδοτική προσέγγιση είναι να μετατρέψουμε την αλγοριθμική μορφή του MSLA στο ισοδύναμο μη γραμμικό σύστημα με ανάδραση που φαίνεται στο σχήμα 8. Το σύστημα αποτελείται από $r + 1$ φίλτρα δύο εισόδων και μια μη γραμμική συνάρτηση πολλών μεταβλητών $f(\cdot) : \mathbb{R}^{r+1} \rightarrow \{\pm 1\}$. Η συνάρτηση $f(\cdot)$ μπορεί να θεωρηθεί ως το ισοδύναμο για τον 1-bit κβαντιστή των συμβατικών Σ-Δ διαμορφωτών.



Σχήμα 8: Το σχηματικό διάγραμμα του MSLA Σ-Δ διαμορφωτή.

Μπορεί να γίνει απλοποίηση της σχέσης 21 μέσω ορισμένων μαθηματικών χειρισμών. Συγκεκριμένα, η παράμετρος e_{n+j} στα επιμέρους κόστη εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των εισόδων x_i , των προηγούμενων εξόδων y_i , των προηγούμενων εξόδων του φίλτρου G , e_{n-i} , $i \geq 0$ και των u_0, u_1, \dots, u_{j-1} . Αυτό επιτυγχάνεται με την εφαρμογή της διαφορικής εξίσωσης που εκφράζει το φίλτρο της σχέσης 22,

$$e_{n+j} = \sum_{i=1}^l b_i x_{n+j-i} - \sum_{i=1}^j b_i u_{j-i} - \sum_{i=j+1}^l b_i y_{n+j-i} - \sum_{i=1}^m a_i e_{n+j-i}. \quad (23)$$

Η απλοποίηση, οδηγεί τα επιμέρους κόστη να ισούνται με

$$D_{j,n} = \left| v_{j,n} - \sum_{i=0}^j c_{j,i} u_{j-i} \right|$$

, όπου οι παράμετροι $v_{j,n}$ ισούνται με

$$v_{j,n} = \sum_{i=0}^j c_{j,i} x_{n+j-i} + \sum_{i=j+1}^{j+l-1} c_{j,i} (x_{n+j-i} - y_{n+j-i}) + \sum_{i=0}^{m-1} d_{j,i} e_{n-i}.$$

Για τον ορισμό των επιμέρους παραμέτρων, c_i, d_i , καθώς και για την αναλυτική απλοποίηση δείτε το [6].

Από τη σχέση 23 παίρνουμε τον μετασχηματισμό z και για $j = 0$ έχουμε

$$E(z) = G(z) (X(z) - Y(z)). \quad (24)$$

Επίσης, από τη σχέση ??, παίρνοντας τον μετασχηματισμό z , και συνδυάζοντάς το με τη σχέση 24, έχουμε

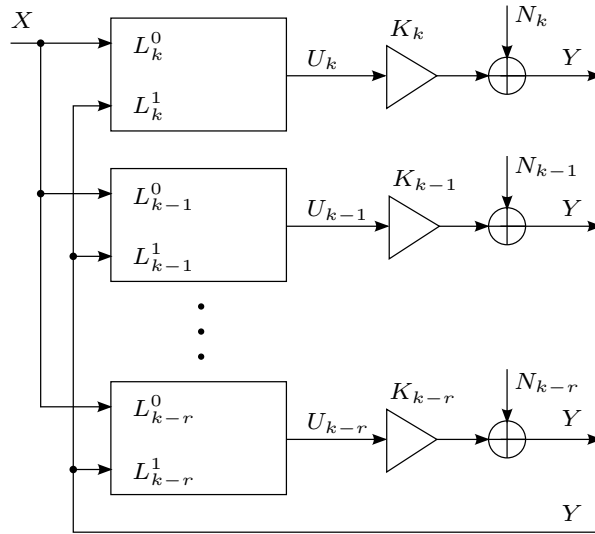
$$U_j(z) = L_j^0(z)X(z) + L_j^1(z)Y(z), \quad (25)$$

όπου $U_j(z)$ είναι ο μετασχηματισμός z της εξόδου της εξόδου του j -στου φίλτρου και ακόμα

$$L_j^0(z) = \sum_{i=0}^{j+l-1} c_{i,j} z^{j-i} + G(z) \sum_{i=0}^{m-1} d_{j,i} z^{-i}$$

$$L_j^1(z) = - \sum_{i=j+1}^{j+l-1} c_{j,i} z^{j-1} - G(z) \sum_{i=0}^{m-1} d_{j,i} z^{-i},$$

με $k-r \leq j \leq k$. Οι παραπάνω εξισώσεις εκφράζουν το σχηματικό διάγραμμα του MSLA που φαίνεται στο σχήμα 8.



Σχήμα 9: Το σχηματικό διάγραμμα του MSLA Σ-Δ διαμορφωτή με το προσεγγιστικό μοντέλο για τον θόρυβο κβαντισμού.

Για την εξαγωγή των συναρτήσεων μεταφοράς του MSLA Σ-Δ διαμορφωτή, έχει προταθεί η αντικατάσταση του κβαντιστή του διαμορφωτή με επιπρόσθετες πηγές θορύβου, $r + 1$ στο πλήθος, και σταθερά κέρση K_j , μετά την έξοδο κάθε φίλτρου, όπως φαίνονται στο σχήμα 9. Για τη συνέχεια της ανάλυσης περιοριζόμαστε στη συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει από το πρώτο φίλτρο, καθώς αυτό έχει την περισσότερη δυναμική από τα υπόλοιπα. Για τον υπολογισμό της NTF θέτουμε $X(z) = 0$ και ορίζουμε ως $N_k(z)$ τον μετασχηματισμό z του επιπρόσθετου θορύβου στην έξοδο του φίλτρου k . Τότε, έχουμε,

$$Y(z) = N_k(z) + K_k L_k^1(z) Y(z), \quad (26)$$

οπότε η NTF είναι ίση με

$$NTF_{MSLA}(z) = \left. \frac{Y}{N_k} \right|_{X=0} = \frac{1}{1 - K_k L_k^1}. \quad (27)$$

Αντίστοιχα,

$$STF_{MSLA}(z) = \left. \frac{Y}{X} \right|_{N_i=0} = \frac{K_k L_k^0}{1 - K_k L_k^1}. \quad (28)$$

Τα κέρδη K_k υπολογίζονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιούν τη ενέργεια του σφάλματος του γραμμικού μοντέλου του κβαντιστή $y_n - K - ku_{k,n}$. Αυτό οδηγεί σε

$$K_k = \frac{\langle y, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} = \frac{\langle y, u_k \rangle}{\sigma_{u_k}^2}, \quad (29)$$

όπου η εφαρμογή του $\langle \alpha, \beta \rangle$ ορίζεται ως το μέσο χρονικό όρος, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \alpha_n \beta_n$, των ακολουθιών α_n, β_n .

3 Αλγόριθμοι Μοντελοποίησης

Τις τελευταίες δεκαετίες έχει παρατηρηθεί μεγάλη προσπάθεια, τόσο από την ακαδημαϊκή κοινότητα, όσο και από τη βιομηχανία, ώστε να αναπτυχθούν τεχνικές μοντελοποίησης (black box macromodelling techniques). Ουσιαστικά πρόκειται για τον εντοπισμό παραμέτρων, που όταν χρησιμοποιούνται σε μια μαθηματική φόρμουλα, αποδίδουν μια παρεμφερής αναπαράσταση της συμπεριφοράς ενός συστήματος. Στις μέρες μας, υπάρχουν πολλά σχεδιαστικά εργαλεία και πολλές επιστημονικές περιοχές στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάποια τεχνική μοντελοποίησης. Μπορούμε επίσης να αναφέρουμε ότι ο κύριος λόγος για τον οποίο τα εργαλεία μοντελοποίησης υιοθετήθηκαν από τις κοινότητες των ηλεκτρονικών, ηλεκτρολόγων και όσων ασχολούνται με ηλεκτρομαγνητικά πεδία αποτελεί η διάδοση του Vector Fitting αλγόριθμου [9].

3.1 Κλασικές Μέθοδοι Μοντελοποίησης

Ξεκινάμε με το πρόβλημα της έρευνας ενός μοντέλου το οποίο θα "ακουμπά" όσο καλύτερα γίνεται ένα σύνολο από διαθέσιμα δεδομένα. Έστω ένα φυσικό σύστημα το οποίο περιγράφεται σε μαθηματική μορφή από μια διαδικασία $\hat{y} = \hat{g}(\theta)$, όπου θ είναι κάποια ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως π.χ. ο χρόνος ή η συχνότητα και \hat{y} είναι η έξοδος του συστήματος που παρατηρούμε, ενώ η συνάρτηση \hat{g} μας είναι άγνωστη. Διεξάγουμε μετρήσεις στο σύστημα, συλλέγοντας ένα σύνολο δεδομένων

$$(\theta_k, \hat{y}_k), \quad k = 1, \dots, K,$$

τα οποία είναι διαθέσιμα εάν εισάγουμε στο σύστημα την είσοδο θ_k και καταγράψουμε την έξοδο $\hat{y}_k = \hat{g}(\theta_k)$. Προς το παρόν, υποθέτουμε ότι οι μετρήσεις δεν εμπεριέχουν θόρυβο.

Ο σκοπός είναι να βρούμε μια μαθηματική σχέση κλειστής μορφής που θα συνδέει την είσοδο με την έξοδο του συστήματος, δηλαδή

$$y \approx g(\theta; x_1, \dots, x_n) = g(\theta, \mathbf{x}),$$

όπου g είναι μια προκαθορισμένη μορφή συνάρτησης και οι παράμετροι $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι ελεύθεροι παράμετροι, οι οποίοι συλλέγονται στον πίνακα γραμμής \mathbf{x} και η τιμή τους αλλάζει έτσι ώστε να πετύχουμε καλή συμφωνία μεταξύ της g και των εξόδων του πραγματικού συστήματος.

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων πετυχαίνει τα παραπάνω, ελαχιστοποιώντας το τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ μοντέλου και δεδομένων, δηλαδή

$$\mathbf{x}_* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \sum_{k=1}^K (\hat{y}_k - g(\theta_k; \mathbf{x}))^2. \quad (30)$$

Πρακτικά, ο αριθμός των μετρήσεων K είναι πολύ μεγαλύτερος από τον αριθμό των ελεύθερων παραμέτρων n [10].

3.1.1 Γραμμική Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Μία από τις πιο απλές υποθέσεις σχετικά με τη μορφή του πραγματικού-άγνωστου συστήματος είναι ότι υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ των παραμέτρων x και της εξόδου y του συστήματος,

$$y \approx g(\theta; x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j \phi_j(\theta), \quad (31)$$

όπου $\phi_j(\theta)$ είναι προκαθορισμένες συναρτήσεις βάσης (basis functions) ενώ οι παράμετροι x_j υπολογίζονται από την επίλυση της 30. Εκτιμώντας τη σχέση 31 στο σύνολο των διαθέσιμων δεδομένων θ_k , καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &\approx \phi_1(\theta_1)x_1 + \phi_2(\theta_1)x_2 + \dots + \phi_n(\theta_1)x_n \\ \hat{y}_2 &\approx \phi_1(\theta_2)x_1 + \phi_2(\theta_2)x_2 + \dots + \phi_n(\theta_2)x_n \\ &\dots \\ \hat{y}_K &\approx \phi_1(\theta_K)x_1 + \phi_2(\theta_K)x_2 + \dots + \phi_n(\theta_K)x_n \end{aligned}$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί σε μητρική μορφή

$$\Phi \mathbf{x} \approx \mathbf{b}, \quad (32)$$

όπου

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(\theta_1) & \dots & \phi_n(\theta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\theta_K) & \dots & \phi_n(\theta_K) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_K \end{bmatrix}.$$

Συνήθως, ισχύει $K > n$ και ο πίνακας Φ έχει περισσότερες γραμμές από στήλες, και το σύστημα 31 είναι υπερπροσδιορισμένο, με διάνυσμα σφάλματος

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \Phi \mathbf{x}$$

που δεν μπορεί να εξισωθεί με μηδέν. Η λύση x_* , με την έννοια των ελάχιστων τετραγώνων, που δίνεται από την 32, είναι το διάνυσμα που ελαχιστοποιεί την Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος σφάλματος

$$x_* = \operatorname{argmin}_x \|\Phi \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2. \quad (33)$$

3.1.2 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων αποτελεί έναν εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας. Για να το επιβεβαιώσουμε, θεωρούμε ότι έχουμε ένα πραγματικό σύστημα και μετρήσεις της εξόδου του, οι οποίες περιέχουν πρόσθετο θόρυβο. Θεωρούμε, επίσης, ότι ο θόρυβος ακολουθεί μια γκαουσιανή κατανομή με τυπική απόκλιση σ . Η πιθανότητα η μέτρηση μας να είναι ίδια με την ακριβή έξοδο του

συστήματος \hat{y}_k , δεδομένου ενός καθορισμένου τύπου μοντέλου $g(\theta; \mathbf{x})$ και ενός διανύσματος από ελεύθερες μεταβλητές \mathbf{x} περιγράφεται από την ακόλουθη γκαουσιανή κατανομή:

$$p_k(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{[\hat{y}_k - g(\theta_k; \mathbf{x})]^2}{2\sigma^2}\right),$$

όπου ο παράγοντας κανονικοποίησης έχει παραλειφτεί.

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας για όλες τις μετρήσεις, θεωρώντας πως είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, ορίζεται ως

$$p(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^K p_k(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^K \exp\left(-\frac{[\hat{y}_k - g(\theta_k; \mathbf{x})]^2}{2\sigma^2}\right),$$

υπολογίζοντας το γινόμενο των επιμέρους συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας για κάθε ξεχωριστή μέτρηση. Αυτή η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας εξαρτάται από τις παραμέτρους του μοντέλου και τις μετρήσεις που έχουν γίνει. Εάν, όμως, θεωρηθεί ως συνάρτηση των αγνώστων παραμέτρων του μοντέλου μόνο, τότε η συνάρτηση αυτή ονομάζεται πιθανοφάνεια. Έτσι η διαδικασία με την οποία το μοντέλο υπολογίζεται σύμφωνα με ένα σύνολο μετρήσεων ονομάζεται και μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας, αφού περιλαμβάνει τον υπολογισμό των παραμέτρων x_j οι οποίες μεγιστοποιούν την πιθανότητα $p(\mathbf{x})$.

Με δεδομένο ότι

$$\max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \max_{\mathbf{x}} \ln p(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \min \sum_{k=1}^K [\hat{y}_k - g(\theta_k; \mathbf{x})]^2,$$

παρατηρούμε ότι η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας συμπίπτει με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων στη σχέση 32.

Αξίζει να αναφερθούμε και στη περίπτωση που η τυπική απόκλιση του θορύβου είναι διαφορετική για κάθε μέτρηση, έστω σ_k . Τότε, η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας μπορεί να τροποποιηθεί και η λύση δίνεται από

$$x_* = \arg \min \sum_{k=1}^K \frac{[\hat{y}_k - g(\theta_k; \mathbf{x})]^2}{\sigma_k^2}. \quad (34)$$

Πρόκειται για μια μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων που εμπεριέχει βάρη (weighted linear LS solution), όπου το σφάλμα που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο, $r_k = \hat{y}_k - g(\theta_k; \mathbf{x})$ πολλαπλασιάζεται από έναν παράγοντα βάρους ίσο με $w_k = 1/\sigma_k$. Σε επόμενα κεφάλαια θα μιλήσουμε για τη σημασία επιλογής του βάρους.

Για την κατανόηση των παραπάνω, θα προχωρήσουμε σε ένα παράδειγμα. Αρχικά, θεωρούμε ένα μοντέλο το οποίο εκφράζεται σε μια γενική πολυωνμική μορφή βαθμού $n > 1$. Έπειτα, θεωρούμε ότι το μοντέλο εξαρτάται από μια ανεξάρτητη μεταβλητή θ η οποία εκφράζει τη μιγαδική συχνότητα, δηλαδή $\theta = s$, όπου s είναι η μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace. Ο υπολογισμός πολυωνμικών μοντέλων είναι ένα αρχικό βήμα για την εξεύρεση ακριβών μοντέλων συστημάτων, τα οποία εκφράζονται με ρητές συναρτήσεις μεταφοράς.

Συγκεκριμένα, με δεδομένα τις μετρήσεις

$$\left(s_k, \hat{H}_k \right), \quad k = 1, \dots, K, \quad (35)$$

οι οποίες πραγματοποιήθηκαν σε ένα άγνωστο σύστημα $\hat{H}(s)$, αναζητούμε ένα πολωνιμικό μοντέλο έτσι ώστε

$$\hat{H}(s) \approx H(s; x_0, \dots, x_n) = H(s, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^n x_j s^j. \quad (36)$$

Το παραπάνω ακολουθεί τη κλασσική μορφή για το μοντέλο που περιγράφεται στη σχέση 31, για

$$\phi_j(s) = s^j, \quad j = 0, \dots, n.$$

Να σημειώσουμε ότι η αρίθμηση ξεκινά από το $j = 0$, έτσι ώστε ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων x_j είναι $n + 1$. Επίσης, ισχύει ότι ο αριθμός των μετρήσεων που έχουμε στη διάθεσή μας είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των παραμέτρων που θέλουμε να υπολογίσουμε, δηλαδή $K > n + 1$. Το μοντέλο 36 εξαρτάται γραμμικά από τις άγνωστες παραμέτρους x_j έτσι ώστε το πρόβλημα να αποτελεί την επίλυση ενός γραμμικού υπερπροσδιορισμένου συστήματος. Το σύστημα αυτό εκφράζεται όπως και στη σχέση 32, με

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 & \dots & s_1^n \\ 1 & s_2 & s_2^2 & \dots & s_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & s_K & s_K^2 & \dots & s_K^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \\ \vdots \\ \hat{H}_K \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Επειδή ο πίνακας Φ και το διάνυσμα \mathbf{b} περιέχουν μιγαδικές τιμές, πρέπει να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στην επίλυση του συστήματος, ώστε να έχουμε πραγματικές τιμές για τις παραμέτρους x_j . Με αυτή την προϋπόθεση, διαχωρίζουμε τους πίνακες σε πραγματικό και φανταστικό μέρος,

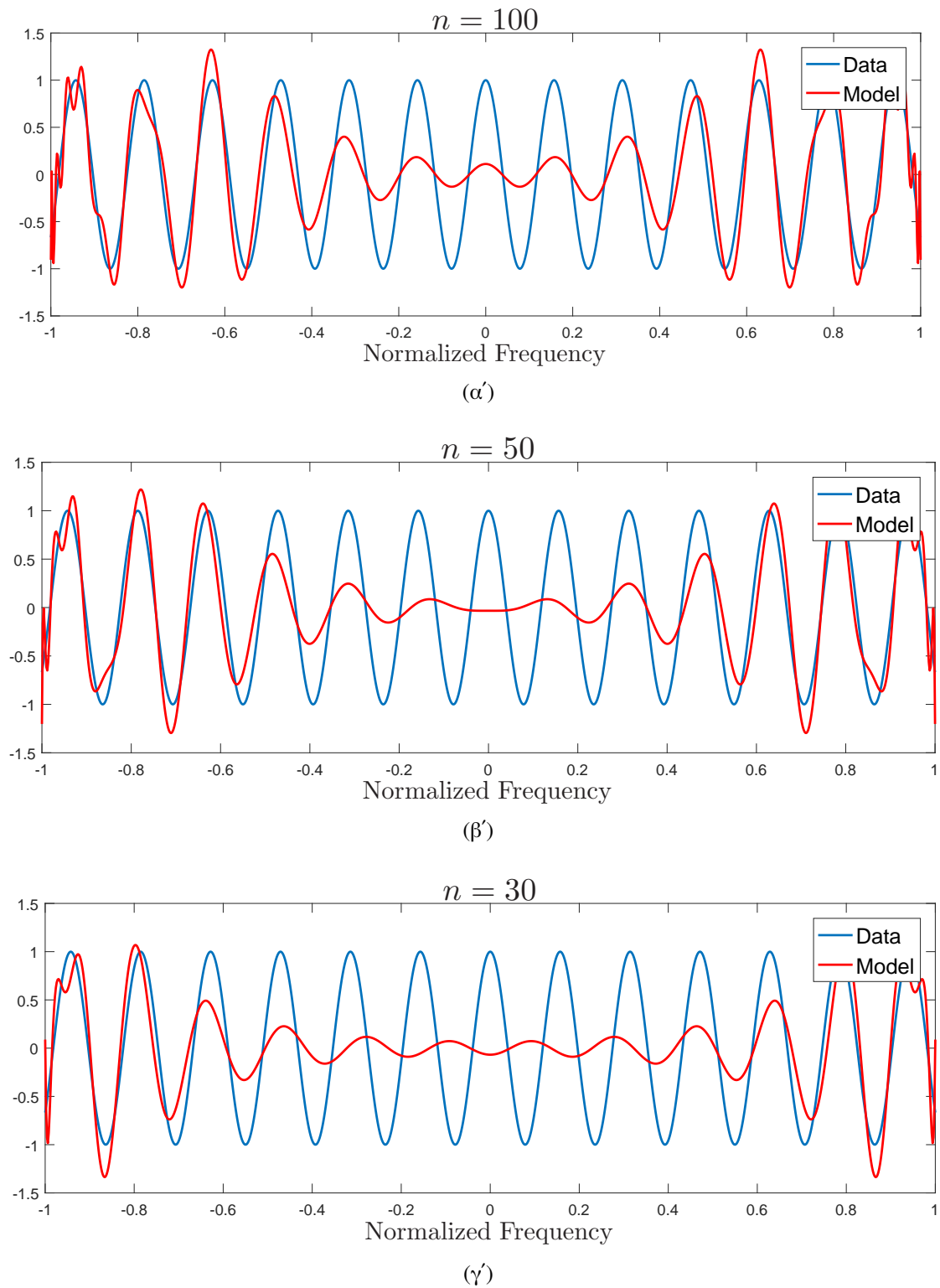
$$\Phi = \Phi' + \Phi''j, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}''j \quad (38)$$

και ξαναγράφουμε την εξίσωση 32 στη μορφή

$$\begin{bmatrix} \Phi' \\ \Phi'' \end{bmatrix} x \approx \begin{bmatrix} \mathbf{b}' \\ \mathbf{b}'' \end{bmatrix}, \quad (39)$$

όπου όλοι οι πίνακες και τα διανύσματα περιέχουν πραγματικές τιμές.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε τη συνάρτηση $\hat{H}(s) = e^{-sT}$, με $T = 40$. Θέλουμε να βρούμε ένα πολυώνυμο που θα ταιριάζει με τη συνάρτηση μας, για $s = j\omega$ και στο πεδίο συχνοτήτων $\omega \in [-1, 1]$. Υπολογίζουμε $2K$ συχνότητες που ισαπέχουν, με $K = 500$. Σχηματίζουμε τους πίνακες της σχέσης 37 και λύνουμε το σύστημα της σχέσης 32. Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα για τρεις διαφορετικές τιμές του βαθμού πολυωνύμου n .



Σχήμα 10: Σύγκριση της ακρίβειας πολωνικού μοντέλου για $n = 100, 50, 30$, για τη συνάρτηση $\hat{H}(s) = e^{-sT}$.

Ο πίνακας Φ στη σχέση 37 ονομάζεται Vandermonde πίνακας και έχει πολύ συγκεκριμένη δομή, καθώς κάθε γραμμή του αποτελεί μια γεωμετρική πρόοδο της μεταβλητής s_k . Είναι γνωστό ότι ο πίνακας Vandermonde έχει μεγάλο δείκτη κατάστασης κ καθώς το μέγεθος $n + 1$ αυξάνεται. Όσο μεγαλύτερος είναι ο δείκτης κατάστασης, τόσο πιο δύσκολο είναι να υπολογιστεί αριθμητικά η λύση x του συστήματος.

Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται και από το παράδειγμά μας, στο οποίο καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των παραμέτρων, η ακρίβεια του μοντέλου τείνει να φθάσει σε ένα μέγιστο. Για διπλασιασμό των παραμέτρων από $n = 50$ σε $n = 100$ η ακρίβεια είναι σχεδόν ίδια. Η παραπάνω δυσκολία μπορεί να αντιμετωπιστεί με χρήση διαφορετικών basis functions, όπως θα αναφέρουμε στα επόμενα κεφάλαια.

3.2 Μη Γραμμικές Μέθοδοι Μοντελοποίησης

Ο υπολογισμός μοντέλων για συστήματα τα οποία αντιστοιχούν σε ρητές συναρτήσεις μεταφοράς, βασισμένα στη σχέση εισόδου και εξόδου τους, έγκυται σε ένα πρόβλημα παρεμβολής ρητής καμπύλης (rational curve fitting problem). Σε αυτό το κεφάλαιο, αναφερόμαστε σε αυτό το ζήτημα και αποδεικνύουμε ότι πρόκειται για ένα μη γραμμικό πρόβλημα.

Ξεκινάμε πάλι την ανάλυσή μας, θεωρώντας ένα πραγματικό σύστημα $\hat{H}(s)$, για το οποίο έχουμε μετρήσεις σε διακριτά συχνοτικά σημεία, s_k . Θεωρούμε ότι το μοντέλο έχει την ακόλουθη ρητή μορφή

$$H(s; \mathbf{x}) = \sum_j \sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{c_{j,\nu}}{(s - p_j)^\nu}, \quad (40)$$

όπου κάθε διακριτός πόλος p_j έχει πολυπλοκότητα n_j . Για λόγους απλότητας, περιορίζουμε την πολυπλοκότητα των πόλων σε $n_j = 1$, οπότε το μοντέλο έχει τη μορφή

$$H(s; \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{s - p_j}, \quad (41)$$

όπου το c_j είναι ο αριθμητής που σχετίζεται με το p_j . Οι $2n$ ελεύθεροι παράμετροι συλλέγονται σε ένα διάνυσμα

$$\mathbf{x}^T = (c_1, c_2, \dots, c_n, p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Το διάνυσμα σφάλματος $r_k(\mathbf{x})$ είναι ίσο με

$$r_k(\mathbf{x}) = \hat{H}_k - \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{s_k - p_j} \quad (42)$$

και είναι φανερό ότι η τιμή του σφάλματος εξαρτάται με μη γραμμικό τρόπο από τα περιεχόμενα του διανύσματος \mathbf{x} .

Το γεγονός ότι η παραπάνω μορφή του μοντέλου οδηγεί σε μη γραμμική σχέση ανάμεσα στο σφάλμα και τις ελεύθερες παραμέτρους, μας αναγκάζει να υιοθετήσουμε

μια διαφορετική μορφή για το μοντέλο, στην οποία οι πόλοι του θα είναι σταθεροί και γνωστοί έτσι ώστε

$$H(s; \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \frac{1}{s - p_j} = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(s), \quad (43)$$

όπου $\phi_j(s)$ είναι μια basis function που περιέχει τους σταθερούς πόλους. Οι μόνες ελεύθεροι παράμετροι είναι πλέον οι αριθμητές των κλασμάτων,

$$\mathbf{x}^T = (c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (44)$$

Συνεπώς, το διάνυσμα σφάλματος μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \Phi \mathbf{x},$$

όπου το οι πίνακες ορίζονται ως

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1 - p_1} & \frac{1}{s_1 - p_2} & \cdots & \frac{1}{s_1 - p_n} \\ \frac{1}{s_2 - p_1} & \frac{1}{s_2 - p_2} & \cdots & \frac{1}{s_2 - p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{s_K - p_1} & \frac{1}{s_K - p_2} & \cdots & \frac{1}{s_K - p_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \\ \vdots \\ \hat{H}_K \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Το διάνυσμα σφάλματος εξαρτάται γραμμικά από τις ελεύθερες παραμέτρους και συνεπώς η ελαχιστοποίηση της Ευκλείδειας νόρμας του επιτυγχάνεται με την επίλυση του συστήματος μέσω ελαχίστων τετραγώνων. Συγκεκριμένα, η ελαχιστοποίηση της

$$F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$$

είναι μια σχετικά απλή διαδικασία, καθώς πρόκειται για μια κυρτή συνάρτηση η οποία έχει ολικό ελάχιστο, και κατά συνέπεια υπάρχει μοναδική λύση x_* για την οποία ελαχιστοποιείται.

3.2.1 Μη Γραμμική Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Η εξεύρεση των βέλτιστων παραμέτρων x_* για τις οποίες η σχέση 42 ελαχιστοποιείται, μπορεί να είναι αρκετά επίπονη λόγω της μη γραμμικότητας. Γενικά, η $F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2$ παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα x_q . Μέθοδοι, όπως η μέθοδος του Νεύτωνα για τοπική βελτιστοποίηση δεν εγγυούνται την εξεύρεση της βέλτιστης λύσης x_* . Το πρόβλημα των τοπικών ελαχίστων αποτελεί κομμάτι της μοντελοποίησης συστημάτων και πρέπει να αποδεχτούμε ότι το αποτέλεσμα μια διαδικασίας μοντελοποίησης μπορεί να μην ανταποκρίνεται στο ολικό ελάχιστο, δηλαδή στη βέλτιστη δυνατή λύση.

3.2.2 Γραμμικοποίηση μέσω Βαρών

Μια προσπάθεια για την απλοποίηση του μη γραμμικού προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων παρουσιάστηκε από τον Levy [11]. Αυτή η πρώτη προσέγγιση του ζητήματος αποτέλεσε αφετηρία για πολλές βελτιώσεις και οδήγησε στα υψηλής απόδοσης εμπορικά εργαλεία μοντελοποίησης των ημερών μας.

Ας θεωρήσουμε το ίδιο πρόβλημα μοντελοποίησης ενός πραγματικού συστήματος, για το οποίο έχουμε στη διάθεσή μας συχνοτικές μετρήσεις (s_k, \hat{H}_k) για $k = 1, \dots, K$. Ας θεωρήσουμε ότι το μοντέλο μας θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$H(s; \mathbf{x}) = \frac{N(s; \mathbf{x})}{D(s; \mathbf{x})} = \frac{a_0 + a_1s + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1}s^{n-1} + s^n},$$

όπου οι βαθμοί m, n του αριθμητή και παρονομαστή έχουν επιλεγθεί τυχαία. Το διάνυσμα ελεύθερων παραμέτρων

$$\mathbf{x} = (a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^T$$

υπολογίζονται ελαχιστοποιώντας την ευκλείδεια νόρμα

$$F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2 \quad (46)$$

όπου

$$\mathbf{r}_k(\mathbf{x}) = \hat{H}_k - \frac{N(s_k; \mathbf{x})}{D(s_k; \mathbf{x})}. \quad (47)$$

Η μέθοδος του Levy χρησιμοποιεί ένα τροποποιημένο διάνυσμα σφάλματος, $\mathbf{e}(\mathbf{x})$, το οποίο υπολογίζεται από το αρχικό $\mathbf{r}_k(\mathbf{x})$, πολλαπλασιάζοντάς το επί τον άγνωστο παρονομαστή του μοντέλου $D(s_k; \mathbf{x})$

$$\mathbf{e}_k(\mathbf{x}) = D(s_k; \mathbf{x})\mathbf{r}_k(\mathbf{x}) = D(s_k; \mathbf{x})\hat{H}_k - N(s_k; \mathbf{x}). \quad (48)$$

Έτσι το πρόβλημα τροποποιείται στην μορφή

$$\mathbf{x}_{**} = \arg \min G(\mathbf{x}), \quad G(\mathbf{x}) = \|\mathbf{e}(\mathbf{x})\|^2.$$

Μια πιο προσεκτική ματιά στη σχέση 48 μας οδηγεί στο ότι

$$\mathbf{e}_k(\mathbf{x}) = (b_0 + b_1s_k + \dots + s_k^n)\hat{H}_k - (a_0 + a_1s_k + \dots + a_ms^m),$$

τα οποία σε μητρική μορφή συμβολίζονται ως

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \Psi\mathbf{x}, \quad (49)$$

όπου $(\mathbf{b})_k = \hat{H}_k s_k^n$ και

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & \dots & s_1^m & -\hat{H}_1 & \hat{H}_1 s_1 & \dots & -\hat{H}_1 s_1^{n-1} \\ 1 & s_2 & \dots & s_2^m & -\hat{H}_2 & \hat{H}_2 s_2 & \dots & -\hat{H}_2 s_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_K & \dots & s_K^m & -\hat{H}_K & \hat{H}_K s_K & \dots & -\hat{H}_K s_K^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Ψ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$\Psi = (\Phi_{m+1} - \hat{H}\Phi_n)$$

όπου $\hat{H} = \text{diag}\{\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_K\}$ και Φ_{nu} είναι ο πίνακας Vandermonde που ορίζεται από το σύνολο των διαθέσιμων σημείων s_k με ν στήλες. Κοιτάζοντας τη σχέση 49,

βλέπουμε ότι το τροποποιημένο σφάλμα εξαρτάται γραμμικά από το διάνυσμα των ελεύθερων μεταβλητών. Έτσι, το τροποποιημένο πρόβλημα λύνεται με την γραμμική μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων,

$$x_{**} = \Psi^\dagger \mathbf{b}. \quad (51)$$

Παρά την απλότητα της μεθόδου αυτής, υπάρχουν δύο βασικά ζητήματα τα οποία επηρεάζουν την απόδοσή της. Κατ'αρχάς, ο πίνακας Ψ έχει βαθμό κατάστασης πολύ μεγάλο, καθώς ο βαθμός του αριθμητή ή του παρονομαστή αυξάνει. Επιπλέον, τυχόν αβεβαιότητες στις μετρήσεις των \check{H}_k επισέρχονται στον πίνακα και μεγενθύνονται λόγω του μεγάλου βαθμού κατάστασής του.

Το δεύτερο και πιο σοβαρό ζήτημα με τη μέθοδο του Levy είναι ότι η λύση x_{**} είναι γενικά διαφορετική από την επιθυμητή μας λύση x_* , καθώς το πρόβλημα βελτιστοποίησης που λύνουμε μέσω της μεθόδου του Levy είναι διαφορετικό από το αρχικό. Πιο συγκεκριμένα, η νόρμα που ελαχιστοποιείται είναι ίση με

$$G(\mathbf{x}) = \|e(\mathbf{x})\|^2 = e(\mathbf{x})^H e(\mathbf{x}) = [\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x})]^H \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2. \quad (52)$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η x_{**} αποτελεί μια λύση σε ένα πρόβλημα με βάρη $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ ίσα με το πλάτος του παρονομαστή του μοντέλου. Αφού ο παρονομαστής είναι πολυώνυμο, είναι αναμενόμενο το πλάτος του να έχει διακυμάνσεις αρκετών τάξεων μεγέθους, καθώς η συχνότητα s_k μεταβάλλεται. Έτσι, το σφάλμα ακρίβειας μπορεί σε ορισμένες συχνότητες να μεγενθύνεται και σε άλλες να μειώνεται κατά ένα παράγοντα ο οποίος εξαρτάται από το μοντέλο. Έτσι προκύπτει μια συστηματική διαφορά (bias) στο πρόβλημά μας.

3.3 Η Sanathanan-Koerner επαναληπτική μέθοδος

Ξεκινώντας από ένα σύνολο δειγμάτων από τον χώρο συχνότητας, (s_k, \check{H}_k) , για $k = 1, \dots, K$, θέλουμε να καταλήξουμε σε ένα ρητό μοντέλο της μορφής

$$H(s; \mathbf{x}) = \frac{N(s; \mathbf{x})}{D(s; \mathbf{x})} = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1} + s^n}, \quad (53)$$

όπου $N(s; \mathbf{x})$ και $D(s; \mathbf{x})$ δηλώνουν τα πολυώνυμα του αριθμητή και του παρονομαστή, βαθμού m και n αντίστοιχα, και οι άγνωστοι παράμετροι δηλώνονται σε μητρική μορφή

$$\mathbf{x} = (a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^T.$$

Ο σκοπός είναι να καθοριστούν οι παραπάνω άγνωστοι παράμετροι, έτσι ώστε κάποια νόρμα του διανύσματος διαφοράς (residual error vector) να ελαχιστοποιείται

$$r_k(\mathbf{x}) = \check{H}_k - \frac{N(s; \mathbf{x})}{D(s; \mathbf{x})} \quad (54)$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλύθηκε η προσέγγιση του Levy για την επίλυση του προβλήματος αυτού, που περιλαμβάνει τον ορισμό ενός τροποποιημένου residual error vector

$$e_k(\mathbf{x}) = D(s_k; \mathbf{x})r_k(\mathbf{x}) = D(s_k; \mathbf{x})\check{H}_k - N(s_k; \mathbf{x}), \quad (55)$$

το οποίο προκύπτει από το αρχικό, $r_k(\mathbf{x})$ πολλαπλασιάζοντάς το επί τον παρονομαστή του μοντέλου. Η ελαχιστοποίηση της νόρμας $\|e(\mathbf{x})\|$ γίνεται λύνοντας ένα γραμμικό σύστημα, το οποίο όμως δεν αποδίδει καλά αποτελέσματα, όπως έχει ήδη αναφερθεί.

Με βασική ιδέα το τροποποιημένο residual error vector, η μέθοδος Sanathanan-Koerner προσπαθεί να περιορίσει τα αρνητικά ζητήματα της μεθόδου του Levy. Ο πιο απλός και αποτελεσματικός τρόπος για να περιοριστεί το bias error λόγω του weighting από το πλάτος του παρονομαστή του μοντέλου, είναι η διαίρεση κάθε στοιχείου $e_k(\mathbf{x})$ με το ίδιο τον παρονομαστή $D(s_k, \mathbf{x})$,

$$r_k(\mathbf{x}) = \frac{D(s_k, \mathbf{x})\hat{H}_k - N(s_k, \mathbf{x})}{D(s_k, \mathbf{x})}, \quad (56)$$

κάτι που μας οδηγεί στο αρχικό, μη γραμμικό πρόβλημα. Αφού η επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος είναι δύσκολη, η ανάγκη για ισοσταθμίσουμε τις απώλειες bias από τη Levy μέθοδο μας οδηγεί σε μια προσεγγιστική, επαναληπτική μέθοδο. Συμβολίζουμε στο εξής τον αριθμό της επανάληψης με ν , και ορίζουμε την προσεγγιστική λύση στη ν -στη επανάληψη ως \mathbf{x}_ν . Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε ένα τροποποιημένο residual error vector, το οποίο εξαρτάται από την επανάληψη, ως

$$r_k^\nu(\mathbf{x}_\nu) = \frac{D(s_k, \mathbf{x}_\nu)\hat{H}_k - N(s_k, \mathbf{x}_\nu)}{D(s_k, \mathbf{x}_{\nu-1})}. \quad (57)$$

Στην ουσία, το τροποποιημένο residual vector διαφέρει από το αντίστοιχο του Levy κατά ένα παράγοντα βάρους $D(s_k, \mathbf{x}_{\nu-1})$, ο οποίος είναι ίσος με την εκτίμηση για τον παρονομαστή του μοντέλου στην προηγούμενη επανάληψη. Αφού αυτός ο όρος είναι γνωστός όταν η ν -στη επανάληψη λαμβάνει χώρα, η ελαχιστοποίηση του $\|r^\nu(\mathbf{x}_\nu)\|$ πετυχαίνεται μέσω ενός γραμμικού συστήματος ελαχίστων τετραγώνων. Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση 49, η λύση στη ν -στη επανάληψη βρίσκεται με την επίλυση του συστήματος

$$(\mathbf{M}_{\nu-1}\Psi)\mathbf{x}_\nu \approx \mathbf{M}_{\nu-1}\mathbf{b}, \quad (58)$$

όπου $b_k = \hat{H}_k s_k^n$, ο πίνακας Ψ έχει οριστεί στη σχέση 50 και επιλέγον

$$\mathbf{M}_{\nu-1} = \text{diag}\{m_1^{\nu-1}, \dots, m_K^{\nu-1}\}, \quad m_k^{\nu-1} = \frac{1}{D(s_k; \mathbf{x}_{\nu-1})}. \quad (59)$$

Στην πρώτη επανάληψη, ο παρονομαστής του μοντέλου αρχικοποιείται στη τιμή $m_k^0 = 1$ για όλες τις συχνότητες. Έτσι, η πρώτη επανάληψη συμπίπτει με τη μέθοδο του Levy. Ωστόσο, καθώς η Sanathanan-Koerner (SK) προχωρά, το σφάλμα της πρώτης επανάληψης μειώνεται. Εάν οι επαναλήψεις σταθεροποιηθούν, έτσι ώστε η μέθοδος να συγκλίνει, το αρχικό σφάλμα μηδενίζεται, αφού καθώς $\nu \rightarrow \infty$ έχουμε $D(s_k; \mathbf{x}_\nu) \sim D(s_k; \mathbf{x}_{\nu-1})$ και το residual vector στη 57 ταυτίζεται με το αρχικό στη σχέση 54. Αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι η εφαρμογή των βαρών της σχέσης 59 αντιστοιχεί σε κανονικοποίηση των γραμμών του συστήματος και αντισταθμίζει το μεγάλο δυναμικό εύρος που μπορεί να παρουσιάζει το σύστημα, οδηγώντας σε καλύτερη αριθμητική ακρίβεια.

Παρά την επίλυση του frequency weighting που παρουσιάζει ο αλγόριθμος του Levy, η μέθοδος SK είναι επιρρεπής σε αριθμητικές ανακρίβειες. Αφού το μοντέλο βασίζεται σε πολυωνμική μορφή του αριθμητή και παρονομαστή, η μεγάλες δυνάμεις του s

σε συνδυασμό με τα πιθανώς μεγάλα εύρη συχνοτήτων στα οποία θέλουμε να πετύχουμε ταύτιση του μοντέλου και του πραγματικού συστήματος, οδηγούν σε μαθηματικά συστήματα τα οποία έχουν κακή κλίμακα και οδηγούν συχνά σε λάθος λύσεις. Επίσης, ακόμα και όταν πετύχουμε σωστή λύση του προβλήματος, υπάρχει μεγάλη απώλεια ακρίβειας όταν μετατρέπουμε τον λόγο δύο πολυωνύμων σε έκφραση χώρου κατάστασης. Τέλος, ένα ακόμα ζήτημα που μπορεί να προκύψει έχει να κάνει με την ευστάθεια. Το μοντέλο που προκύπτει μπορεί να είναι ασταθές.

Για αυτό τον λόγο παρουσιάζουμε τη γενικευμένη μέθοδο Sanathanan-Koerner [12], την οποία θα αναφέρουμε στο εξής ως GSK. Η βασική διαφορά της μεθόδου σε σχέση με τη κλασική SK μέθοδο είναι ότι αντί να χρησιμοποιεί δυνάμεις του s αποκλειστικά σαν basis functions, χρησιμοποιεί μια οποιαδήποτε basis function. Η κακές αριθμητικές ιδιότητες του μονώνυμου s^j μπορούν να αντισταθμιστούν με σωστή επιλογή basis function.

Γενικά, αναζητούμε ένα σύνολο από basis functions $\phi_j(s)$ που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να εκφράσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του ρητού μας μοντέλου μέσω

$$H(s; \mathbf{x}) = \frac{N(s; \mathbf{x})}{D(s; \mathbf{x})} = \frac{\sum_{j=0}^m c_j \phi_j(s)}{\sum_{j=0}^n d_j \phi_j(s)}, \quad (60)$$

όπου το διάνυσμα \mathbf{x} συλλέγει τις άγνωστες παραμέτρους $\{c_j\}$, $\{d_j\}$ με σκοπό να βελτιώσει την κατάσταση του συστήματος προς επίλυση και να περιορίσει το δυναμικό εύρος του $D(s; \mathbf{x}_{\nu-1})$ κατά τις επαναλήψεις.

Αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε επιλογή ρητής συνάρτησης σαν basis function μπορεί να επιτύχει τα παραπάνω. Συγκεκριμένα, υποθέτοντας ότι οποιαδήποτε $\phi_j(s)$ είναι ρητή συνάρτηση, ο γραμμικός συνδυασμός στον αριθμητή και τον παρονομαστή στη σχέση 60 οδηγεί στο να έχουμε ρητή μορφή για τα $N(s; \mathbf{x})$, $D(s; \mathbf{x})$. Συμπεραίνουμε ότι και η $H(s; \mathbf{x})$ είναι ρητή συνάρτηση, ως λόγος ρητών. Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε ότι αυτή είναι η βάση του Vector Fitting αλγόριθμου.

Για να σχηματίσουμε τις εξισώσεις της GSK θεωρούμε ότι $m = n$. Επίσης, όσο για τη μορφή του μοντέλου, για να αποφύγουμε τυχόν απλοποιήσεις στον αριθμητή και τον παρονομαστή, αφαιρούμε τον όρο $j = 0$ από τον παρονομαστή και τον θέτουμε ίσο με $d_0 = 1$. Έτσι, η μορφή του μοντέλου γίνεται

$$H(s; \mathbf{x}) = \frac{N(s; \mathbf{x})}{D(s; \mathbf{x})} = \frac{\sum_{j=0}^m c_j \phi_j(s)}{\phi_0(s) + \sum_{j=1}^n d_j \phi_j(s)},$$

όπου οι ελεύθεροι παράμετροι είναι

$$\mathbf{x} = (c_0, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n)^T.$$

Το residual error, που εξαρτάται από την επανάληψη, μπορεί να υπολογιστεί ως

$$r_k^\nu(\mathbf{x}_\nu) = \frac{D(s_k; \mathbf{x}_\nu) \hat{H}_k - N(s_k; \mathbf{x}_\nu)}{D(s_k; \mathbf{x}_{\nu-1})} = \frac{\left[\phi_0(s_k) + \sum_{j=1}^n d_j^\nu \phi_j(s_k) \right] \hat{H}_k - \sum_{j=0}^n c_j^\nu \phi_j(s_k)}{\phi_0(s_k) + \sum_{j=1}^n d_j^{\nu-1} \phi_j(s_k)}, \quad (61)$$

όπου οι ελεύθεροι παράμετροι ανανεώνονται σε κάθε επανάληψη, μέσω τις ελαχιστοποίησης της Ευκλείδειας νόρμας $\|r^\nu(\mathbf{x}_\nu)\|$. Η νόρμα ελαχιστοποιείται λύνοντας το ακόλουθο σύστημα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

$$(M_{\nu-1} \Psi) \mathbf{x}_\nu \approx M_{\nu-1} \mathbf{b}, \quad (62)$$

όπου ο πίνακας $M_{\nu-1}$ αποτελεί το βάρος σε κάθε επανάληψη και έχει οριστεί στη σχέση 59,

$$\mathbf{b} = \left(\hat{H}_1 \phi_0(s_1), \hat{H}_2 \phi_0(s_2), \dots, \hat{H}_K \phi_0(s_K) \right)^T,$$

και επιπλέον $\hat{H} = \text{diag}\{\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_K\}$ και

$$\Psi = \left(\Phi_0 - \hat{H} \Phi_1 \right). \quad (63)$$

Για basis functions επιλέγουμε τα μερικά κλάσματα με καθορισμένους πόλους, δηλαδή

$$\phi_0(s) = 1, \quad \phi_j(s) = \frac{1}{s - q_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

και συνεπώς οι πίνακες Φ_0 και Φ_1 υπολογίζονται ως

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1 - q_1} & \frac{1}{s_1 - q_2} & \cdots & \frac{1}{s_1 - q_n} \\ \frac{1}{s_2 - q_1} & \frac{1}{s_2 - q_2} & \cdots & \frac{1}{s_2 - q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{s_K - q_1} & \frac{1}{s_K - q_2} & \cdots & \frac{1}{s_K - q_n} \end{bmatrix},$$

$$\text{και} \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{s_1 - q_1} & \frac{1}{s_1 - q_2} & \cdots & \frac{1}{s_1 - q_n} \\ 1 & \frac{1}{s_2 - q_1} & \frac{1}{s_2 - q_2} & \cdots & \frac{1}{s_2 - q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{s_K - q_1} & \frac{1}{s_K - q_2} & \cdots & \frac{1}{s_K - q_n} \end{bmatrix} = [\mathbf{1} \quad \Phi_1]. \quad (64)$$

Η απλότητα του αλγόριθμου GSK είναι αξιόλογη, καθώς χρειάζεται μόνο μερικές γραμμές κώδικα για να υλοποιηθεί.

3.4 Ο Αλγόριθμος Vector Fitting

Σε αυτό το κεφάλαιο, αναλύουμε τον αλγόριθμο Vector Fitting (VF) [9]. Ο VF είναι μια αριθμητική μέθοδος που δέχεται σαν είσοδο μια ακολουθία (set) από δείγματα της συνάρτησης μεταφοράς ενός συνεχούς χρόνου συστήματος στο πεδίο της συχνότητας, και αποδίδει ένα γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και ευσταθές σύστημα - μοντέλο του οποίου η απόκριση είναι όσο το δυνατό παρόμοια με αυτή του αρχικού.

Ο VF αποτελεί μια από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους για εμπορικά εργαλεία μοντελοποίησης και εφαρμοσμένη έρευνα στις περιοχές των Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας, ηλεκτρονικών υψηλής ταχύτητας, συσκευασίας, καθώς και στα μικροκυματικά ηλεκτρονικά [13].

Ο αλγόριθμος εφαρμοζόταν για χρόνια μέχρι να αποδειχτεί ότι μπορεί να αποτελέσει ειδική περίπτωση της GSK επαναληπτικής μεθόδου. Η ανανέωση των συναρτήσεων βάσης (basis functions) σε κάθε iteration αποτελεί το επιπλέον χαρακτηριστικό του VF σε σχέση με τη GSK επαναληπτική μέθοδο. Αυτή η διαφορά καθιστά τον VF περισσότερο ακριβή στα αποτελέσματά του και για αυτό τον λόγο επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί. Στις παρακάτω παραγράφους αναλύεται η λειτουργία του αλγορίθμου.

3.4.1 Το αρχικό μοντέλο

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο ρητό μοντέλο, για το οποίο ισχύει $m = n$,

$$H(s; \mathbf{x}) = \frac{N(s; \mathbf{x})}{D(s; \mathbf{x})} = \frac{c_0 + \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{s-q_j}}{1 + \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{s-q_j}} \quad (65)$$

Υποθέτουμε ότι οι πόλοι q_j είναι γνωστοί και οι παράμετροι c_j και d_j είναι διαθέσιμοι. Είναι εύκολο να μετατρέψουμε τη (65) σε μια κανονική μορφή πόλων-μηδενικών. Συγκεκριμένα, εάν υπολογίσουμε τα μηδενικά του αριθμητή και παρονομαστή στην (65), μπορούμε να γράψουμε

$$H(s; \mathbf{x}) = \frac{N(s; \mathbf{x})}{D(s; \mathbf{x})} = c_0 \frac{\prod_{j=1}^n \left(\frac{s-z_j}{s-q_j}\right)}{\prod_{j=1}^n \frac{s-p_j}{s-q_j}} = c_0 \frac{\prod_{j=1}^n (s - z_j)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad (66)$$

εφόσον οι πόλοι q_j είναι κοινός στον αριθμητή και τον παρονομαστή της (65). Αυτή είναι η κανονική μορφή πόλων-μηδενικών του μοντέλου.

Η παραπάνω σχέση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ξεκινώντας από ένα set διαφορετικών πόλων $\{q_j\}$, για τον καθορισμό των basis functions, η εφαρμογή της GSK επαναληπτικής μεθόδου σε συνδυασμό με το παραπάνω βήμα οδηγεί σε μια εκτίμηση των πόλων του μοντέλου $\{p_j\}$. Ο συνδυασμός της GSK επανάληψης και του βήματος αυτού αποτελεί το πρώτο βήμα του VF, που ονομάζεται μετατόπιση πόλων (pole relocation). Επιπλέον επαναλήψεις της pole relocation διαδικασίας αποτελούν τη ραχοκοκαλιά του αλγορίθμου.

3.4.2 Υπολογισμός των νέων πόλων

Πριν αναφέρουμε με λεπτομέρειες όλα τα στάδια του VF, αναλύουμε τον υπολογισμό των πόλων $\{p_j\}$. Θεωρούμε τη βαθμωτή συνάρτηση μεταφοράς

$$\xi(s) = d_0 + \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{s - q_j} = d_0 \frac{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}{\prod_{j=1}^n (s - q_j)} \quad (67)$$

η οποία περιλαμβάνει τις γνωστές παραμέτρους d_j και q_j , και τις άγνωστες παραμέτρους-μηδενικά p_j . Τα μηδενικά είναι οι πόλοι της συνάρτησης $\frac{1}{\xi(s)}$.

Πρώτα, υπολογίζουμε μια μορφή της $\xi(s)$ στο χώρο κατάστασης ως

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{1}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d_0 u, \end{aligned} \quad (68)$$

όπου οι πίνακες του χώρου κατάστασης ορίζονται ως

$$\mathbf{A} = \text{diag}\{q_1, \dots, q_n\}, \quad \mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T, \quad \mathbf{c}^T = (c_1, \dots, c_n) \quad (69)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς στη σχέση 67 μπορεί λοιπόν να γραφτεί, σύμφωνα με τη φόρμουλα μετατροπής από χώρο κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς, ως

$$\xi(s) = d_0 + \mathbf{c}^T (s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}.$$

Εφόσον ισχύει $\xi(s) = Y(s)/U(s)$ και συνεπώς $1/\xi(s) = U(s)/Y(s)$, μπορούμε να σχηματίσουμε μια μορφή της $1/\xi(s)$ στον χώρο κατάστασης με την εναλλαγή στη σχέση 68 της εισόδου, u και της εξόδου y . Λύνοντας ως προς u στη δεύτερη σχέση της 68 και αντικαθιστώντας στη πρώτη σχέση, έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{1}d_0^{-1}\mathbf{c}^T)\mathbf{x} + \mathbf{1}d_0^{-1}y \\ u &= -d_0^{-1}\mathbf{c}^T \mathbf{x} + d_0 y. \end{aligned} \quad (70)$$

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για να υπολογίσουμε το σύστημα 70 αποτελεί ένα ειδικό τρόπο αναστροφής συστήματος (system inversion). Οι πόλοι της $1/\xi(s)$ υπολογίζονται τώρα ως οι ιδιοτιμές του πίνακα κατάστασης, με $d_0 = 1$,

$$p_j = \lambda(\mathbf{A} - \mathbf{1}d_0^{-1}\mathbf{c}^T). \quad (71)$$

3.4.3 Η επαναληπτική διαδικασία του αλγόριθμου

Είμαστε έτοιμοι να αναλύσουμε τη λειτουργία του αλγορίθμου που επιτρέπει τον υπολογισμό μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς, προσαρμοσμένη σε ένα σύνολο από δείγματα στο πεδίο της συχνότητας (s_k, \tilde{H}_k) .

Ξεκινάμε με την επιλογή ενός συνόλου αυθαίρετων αλλά διακριτών μιγαδικών αριθμών $\{q_j^\nu \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n\}$, οι οποίοι θα αναφέρονται στο εξής ως αρχικοί πόλοι (starting poles). Οι starting poles θα αλλάζουν τιμές από μια επανάληψη στην άλλη, με τον δείκτη ν να υποδηλώνει τον αριθμό της επανάληψης. Έτσι, για μια τυχαία επανάληψη, το σύνολο των πόλων που αντιστοιχούν συμβολίζεται ως

$$\{q_j^\nu, j = 1, \dots, n\}.$$

Οι αντίστοιχες basis functions ορίζονται ως

$$\phi_0^\nu(s) = 1, \quad \text{και} \quad \phi_j^\nu = \frac{1}{s - q_j^\nu}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις basis functions μπορούμε να ορίσουμε και συνάρτηση-βάρους του VF (VF weighting function) ως

$$\xi^\nu(s) = \phi_0^\nu(s) + \sum_{j=1}^n d_j^\nu \phi_j^\nu(s) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{d_j^\nu}{s - q_j^\nu} \quad (72)$$

η οποία χαρακτηρίζεται από τις γνωστές παραμέτρους d_j^ν . Μέσω της σχέσης 72 εκφράζονται όλες οι πιθανές ρητές συναρτήσεις μεταφοράς οι οποίες έχουν πόλους q_j^ν και ισχύει $\xi^\nu(s) \rightarrow 1$ καθώς $s \rightarrow \infty$.

Η weighting function χρησιμοποιείται για να επιβάλλουμε την παρακάτω προσέγγιση-ισότητα

$$\xi^\nu(s_k) \check{H}_k = \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{d_j^\nu}{s_k - q_j^\nu} \right) \check{H}_k \approx c_0^\nu + \sum_{j=1}^n \frac{c_j^\nu}{s_k - q_j^\nu} \quad (73)$$

ώστε να ισχύει σε όλα τα δείγματα συχνότητας s_k με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Συλλέγοντας όλα τα συχνοτικά δείγματα σε γραμμές, σχηματίζουμε το ακόλουθο σύστημα

$$(\Phi_0^\nu - \check{H} \Phi_1^\nu) \mathbf{x}_n \approx \mathbf{b}, \quad (74)$$

όπου $b_k = \check{H}_k \phi_0^\nu(s_k) = \check{H}_k$, $\check{H} = \text{diag}\{\check{H}_1, \dots, \check{H}_K\}$, και το $\Phi_{0,1}^\nu$ να ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση 64. Η λύση μέσω ελαχίστων τετραγώνων συμβολίζεται ως

$$\mathbf{x}_\nu = (c_0^\nu, \dots, c_n^\nu, d_1^\nu, \dots, d_n^\nu)^T. \quad (75)$$

Το επόμενο βήμα είναι αυτό που διαφοροποιεί τον VF από την GSK διαδικασία. Οι παράμετροι d_j^ν έχουν υπολογιστεί, οπότε μπορούμε να γράψουμε τη weighting function της σχέσης 72 σε μορφή πόλων-μηδενικών

$$\xi^\nu(s) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{d_j^\nu}{s - q_j^\nu} = \frac{\prod_{j=1}^n (s - z_j^\nu)}{\prod_{j=1}^n (s - q_j^\nu)}, \quad (76)$$

όπως αναλύθηκε στη προηγούμενη παράγραφο. Τα μηδενικά της weighting function υπολογίζονται από τη 71 και χρησιμοποιούνται για να ορίσουμε

$$q_j^{\nu+1} = z_j^\nu, \quad j = 1, \dots, n, \quad (77)$$

που αποτελούν το σύνολο των starting poles της επόμενης επανάληψης. Αυτό το βήμα του αλγόριθμου ονομάζεται pole relocation για να υποδηλώσει την ανανέωση των πόλων. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση, δηλαδή όταν το σύνολο των πόλων $\{q_j^\nu\}$ σταθεροποιηθεί ανεξάρτητα από τις επαναλήψεις

$$\nu \rightarrow \infty \Rightarrow \{q_j^\nu\} \rightarrow \{p_j\}.$$

Οι τιμές των πόλων, όταν έχουν σταθεροποιηθεί, είναι ίσες με τις τιμές των επικρατούντων πόλων του πραγματικού συστήματος που επιθυμούμε να μοντελοποιήσουμε.

Αξιίζει να αναφερθεί ότι όταν οι πόλοι έχουν σταθεροποιηθεί έτσι ώστε να μην αλλάζουν τιμή καθώς οι επαναλήψεις αυξάνονται, δηλαδή $\{q_j^{\nu+1}\} \approx \{q_j^\nu\}$, η weighting function τείνει να γίνει ίση με μονάδα για το σύνολο των συχνοτήτων, δηλαδή

$$\xi^\nu(s) = \frac{\prod_{j=1}^n (s - q_j^{\nu+1})}{\prod_{j=1}^n (s - q_j^\nu)} \approx 1. \quad (78)$$

Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης 73 γίνεται ίσο με \check{H}_k , και συνεπώς οι παράμετροι c_0^ν, c_j^ν στο δεξί μέλος της σχέσης μπορούν να θεωρηθούν ως η σταθερά και τα υπόλοιπα συνδέονται με τους επικρατούντες πόλους του μοντέλου. Επιπλέον, όταν η σχέση 78 βρίσκεται σε σύγκλιση, τα υπόλοιπα της weighting function $\xi^\nu(s)$ φθίνουν στο 0, $d_j \approx 0$. Έτσι, οι λύσεις στην 75 μπορούν να παρέχουν ένα κριτήριο για τη σύγκλιση της διαδικασίας (χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους d_j^ν) καθώς και τις παραμέτρους του ρητού μοντέλου που επιζητούμε.

Για να επιτύχουμε καλύτερη απόδοση, είναι προτιμητέο να υπολογίζουμε τα υπόλοιπα του ρητού μοντέλου σε ένα τελευταίο βήμα, αντί να τα εξισώνουμε με τις παραμέτρους c_j^ν από τη σχέση 75. Θεωρούμε τους πόλους του μοντέλου p_j , όταν πλέον έχουν σταθεροποιηθεί, και επιβάλλουμε να ισχύει η ακόλουθη ισότητα με προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων

$$\check{H}_k \approx R_0 + \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{s_k - p_j}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (79)$$

για να υπολογίσουμε επακριβώς τα υπόλοιπα R_0, R_j . Αυτό το βήμα του αλγόριθμου ονομάζεται υπολογισμός υπολοίπων (Residue Identification), και πρόκειται για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται τα βήματα του VF αλγόριθμου.

Algorithm 1 VF Algorithm

Require: starting poles $\{q_j^1\}_{j=1}^n$, δείγματα από το χώρο συχνοτήτων $\{(s_k, \check{H}_k)\}_{k=1}^K$

- 1: **for** $\nu = 1, 2, \dots, \nu_{max}$ **do**
- 2: κατασκευή του συστήματος $(\Phi_0^\nu - \check{H} \Phi_1^\nu) \mathbf{x}_n \approx \mathbf{b}$ της σχέσης 74;
- 3: υπολογισμός των παραμέτρων d_j^ν από τις λύσεις \mathbf{x}_ν και σχηματισμός της weighting function $\xi^\nu(s)$;
- 4: υπολογισμός των μηδενικών z_j^ν της $\xi^\nu(s)$ χρησιμοποιώντας τη 71;
- 5: $q_j^{\nu+1} = z_j^\nu$ για $j = 1, \dots, n$;
- 6: **end for**
- 7: $p_j = q_j^{\nu_{max}+1}$ για $j = 1, \dots, n$;
- 8: υπολογισμός R_j για $j = 0, \dots, n$ λύνοντας το γραμμικό σύστημα της 79;

Output: το μοντέλο $H(s) = R_0 + \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{s-p_j}$

3.4.4 Πρακτική Υλοποίηση του Vector Fitting

Μέχρι στιγμής έχουμε αναφερθεί στην επαναληπτική διαδικασία του VF και τις βασικές της ιδιότητες χωρίς να περιορίσουμε τη μορφή του μοντέλου $H(s)$, εκτός του ότι επιβάλλαμε να είναι ρητή συνάρτηση βαθμού n . Ο αλγόριθμος θα ξεκινήσει με ένα σύνολο αυθαίρετων starting poles q_j και θα παράγει τους επικρατούντες πόλους του μοντέλου p_j , οι οποίοι συνδέονται με τους αριθμητές R_j . Οι starting poles μπορούν να επιλεγθούν από το σύνολο του μιγαδικού επιπέδου, όμως όταν μοντελοποιούμε γραμμικά και χρονικά αναλλοίωτα συστήματα, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ορισμένους φυσικούς περιορισμούς, όπως το σύστημα να είναι πραγματικό, δηλαδή με πραγματική κρουστική απόκριση καθώς και αιτιατό και ευσταθές, δηλαδή οι πόλοι του μοντέλου να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Για να πετύχουμε τα παραπάνω, προχωράμε στην εξής ανάλυση. Θεωρούμε ένα ζεύγος συζηγών πόλων $q_j = q'_j + jq''_j$, $q_{j+1} = q_j^*$. Θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι

$$\begin{aligned} d_j &= d'_j + jd''_j, & d_{j+1} &= d_j^*, \\ c_j &= c'_j + jc''_j, & c_{j+1} &= c_j^* \end{aligned}$$

έτσι ώστε η weighting function ξs και το ρητό μοντέλο (s) να ικανοποιούν την προϋπόθεση για πραγματικό σύστημα. Αφού μπορούμε να γράψουμε τα μερικά κλάσματα στη μορφή

$$\frac{d_j}{s - q_j} + \frac{d_j^*}{s - q_j^*} = \left(\frac{1}{s - q_j} + \frac{1}{s - q_j^*} \right) d'_j + \left(\frac{j}{s - q_j} - \frac{j}{s - q_j^*} \right) d''_j, \quad (80)$$

και αναλόγως για τους όρους που σχετίζονται με τις παραμέτρους c_j , μπορούμε να κάνουμε μια αλλαγή στην αναπαράσταση των διανυσμάτων \mathbf{x} και ψ_k εναλλάσσοντας τα ζευγάρια

$$(c_j, c_{j+1}) \leftarrow (c'_j, c''_j), (d_j, d_{j+1}) \leftarrow (d'_j, d''_j)$$

και

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z - q_j}, \frac{1}{z - q_j^*} \right) &\leftarrow \left(\frac{1}{z - q_j} + \frac{1}{z - q_j^*}, \frac{j}{z - q_j} - \frac{j}{z - q_j^*} \right) \\ \left(\frac{\hat{H}_k}{z - q_j}, \frac{\hat{H}}{z - q_j^*} \right) &\leftarrow \left(\frac{\hat{H}_k}{z - q_j} + \frac{\hat{H}_k}{z - q_j^*}, \frac{j\hat{H}_k}{z - q_j} - \frac{j\hat{H}_k}{z - q_j^*} \right). \end{aligned}$$

Εναλλάσσοντας όλα τα ζευγάρια που αντιστοιχούν σε συζυγείς μιγαδικούς πόλους, προκύπτει το παρακάτω τροποποιημένο σύστημα για κάθε γραμμή του αρχικού

$$\bar{\psi}_k^T \bar{\mathbf{x}} \approx \hat{H}_k, \quad (81)$$

όπου το διάνυσμα $\bar{\mathbf{x}}$ συλλέγει όλες τις πραγματικές άγνωστες παραμέτρους. Τα διανύσματα $\bar{\psi}_k^T$ περιέχουν ακόμα μιγαδικές τιμές. Για αυτό τον λόγο σπάμε το διάνυσμα σε πραγματικό και φανταστικό μέρος και έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{bmatrix} \psi_k'^T \\ \psi_k''^T \end{bmatrix} \mathbf{x} \approx \begin{bmatrix} \hat{H}'_k \\ \hat{H}''_k \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Αφού όλα τα στοιχεία του συστήματος στη σχέση 82 είναι πραγματικά, το συνολικό σύστημα που προκύπτει από το συνδυασμό της για όλες τις συχνότητες-δείγματα είναι και αυτό πραγματικό,

$$\bar{\Psi} \bar{x} \approx \bar{b},$$

και το διάνυσμα λύση περιέχει μόνο πραγματικές τιμές, γεγονός που εξασφαλίζει την προϋπόθεση για πραγματική κρουστική απόκριση του μοντέλου.

Επιπρόσθετα, οι μετατοπισμένοι πόλοι σε ένα iteration θα πρέπει να συναντιούνται σε πραγματικές τιμές ή σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών. Ωστόσο, ο υπολογισμός τους μέσω της σχέσης 71, ως ιδιοτιμές ενός πίνακα με μιγαδικά στοιχεία, δεν εγγυάται την παραπάνω προϋπόθεση. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα έρχεται πάλι με μια μορφοποίηση των πινάκων.

Θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η weighting function έχει μια έκφραση στο χώρο κατάστασης η οποία περιέχει μόνο πραγματικές τιμές. Αυτό συμβαίνει με την αντικατάσταση των μπλοκ που αντιστοιχούν στους συζυγείς πόλους στη σχέση 69 με την ακόλουθη διαδικασία

$$\begin{bmatrix} q_j & 0 \\ 0 & q_j^* \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} q'_j & q''_j \\ -q''_j & q'_j \end{bmatrix}, \quad [d_j \quad d_j^*] \leftarrow [d'_j \quad d''_j], \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η ευστάθεια του μοντέλου μπορεί να εξασφαλιστεί μέσω της μεθόδου του VF με έναν απλό χειρισμό. Αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι οι μετατοπισμένοι πόλοι έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Η διαδικασία περιλαμβάνει τον έλεγχο των μετατοπισμένων πόλων για το πρόσημο του πραγματικού τους μέρους. Σε περίπτωση που βρεθούν ασταθείς πόλοι, μετακινούνται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο μέσω της

$$q_j \leftarrow -q_j^* = -q'_j + jq''_j,$$

δηλαδή προβάλλουμε τον ασταθή πόλο στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, αναφορικά με τον φανταστικό άξονα. Η συγκεκριμένη διαδικασία δεν επηρεάζει την ακρίβεια της επαναληπτικής μεθόδου, αφού η μετακίνηση των πόλων είναι ισοδύναμη με το να προσθέσουμε στο μοντέλο μας ένα ολοπερατό φίλτρο, το οποίο δεν έχει επιρροή στο πλάτος, παρά μόνο στη γωνία του.

Η επιλογή των starting poles είναι αρκετά σημαντική [14], καθώς έχει σημαντική επιρροή στην ακρίβεια της διαδικασίας. Θεωρούμε ένα εύρος συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει $[0, \omega_{max}]$ και απαιτούμε οι πόλοι μας να είναι ζεύγη συζυγών μιγαδικών με τα φανταστικά μέρη τους να είναι γραμμικά κατανομημένα στο διάστημα $[0, \omega_{max}]$. Για βαθμό μοντέλου n ζυγό, αυτό μπορεί να εκφραστεί ως

$$q_{j-1,j} = q'_j + jq''_j, \quad q''_j = \frac{j\omega_{max}}{n}, \quad q'_j = -\theta q''_j, \quad j = 2, 4, \dots, n. \quad (83)$$

Τυπικά, χρησιμοποιούμε μια τιμή της τάξης $\theta \approx 0.001$, ή και ακόμα μικρότερη. Αυτή η μέθοδος για επιλογή πόλων έχει τα πλεονεκτήματα ότι το σύστημά μας θα είναι αριθμητικά σε καλή κατάσταση και θα αποδίδει ακριβή αποτελέσματα, ενώ η κατανομή των πόλων σε διαφορετικές συχνοτικές περιοχές οδηγεί σε μικρότερο αριθμό επαναλήψεων του αλγόριθμου.

Τυπικά, σε προβλήματα όπου το σύστημα προς μοντελοποίηση έχει μεγάλο δυναμικό εύρος και το εύρος συχνοτήτων $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ που μας ενδιαφέρει είναι και αυτό μεγάλο, είναι προτιμότερο οι starting poles του μοντέλου να είναι λογαριθμικά κατανεμημένοι στο εύρος συχνοτήτων. Σε αυτή την περίπτωση, το q_j'' στη σχέση 83 υπολογίζεται ως

$$q_j'' = \exp \left[a_{min} + (j - 2) \frac{(a_{max} - a_{min})}{(n - 2)} \right], \quad j = 2, 4, \dots, n, \quad (84)$$

όπου $a_{min} = \ln(\omega_{min})$ και $a_{max} = \ln(\omega_{max})$, με την προϋπόθεση ότι $\omega_{min} > 0$.

3.5 Ο Αλγόριθμος z-Domain Vector Fitting

Η γενική ιδέα του VF μπορεί να τροποποιηθεί έτσι ώστε να γίνεται εξαγωγή μοντέλων διακριτού χρόνου. Η μέθοδος που προκύπτει ονομάζεται z-Domain Vector Fitting (ZDVF). Ο σκοπός είναι να υπολογιστεί ένα ρητό μοντέλο $H(z)$ στο πεδίο z -συχνοτήτων, ξεκινώντας από συχνοτικά δείγματα (z_k, \hat{H}_k) . Αυτά τα δείγματα μπορούν να ανακτηθούν είτε από συχνοτικά δεδομένα συνεχούς χρόνου (s_k, \hat{H}_k) είτε από δεδομένα στο πεδίο του χρόνου $(t_k, \hat{h}[k])$. Στην πρώτη περίπτωση, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο διγραμμικό μετασχηματισμό [15] για να μεταβούμε στο πεδίο z :

$$z_k = \frac{1 + s_k \Delta t / 2}{1 - s_k \Delta t / 2}, \quad (85)$$

ενώ στην περίπτωση όπου τα αρχικά δείγματα είναι ισαπέχοντα δεδομένα στο πεδίο του χρόνου, ο μετασχηματισμός τους στο πεδίο z γίνεται ως εξής

$$\hat{H}(z_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{h}(t_i) z_k^{-i}. \quad (86)$$

Δεν υπάρχουν ουσιώδεις διαφορές ανάμεσα σε ZDVF και στον χρονοσυνεχή αλγόριθμο. Ένα ρητό μοντέλο

$$H(z) = R_0^z + \sum_{j=1}^n \frac{R_j^n}{z - p_j^z} \quad (87)$$

πρέπει να ικανοποιεί όσο το δυνατόν πιο καλά την παρακάτω σχέση

$$H(z_k) \approx \hat{H}(z_k), \quad k = 1, \dots, K,$$

το οποίο επιτυγχάνεται μέσω του VF αλγόριθμου, με τη διαφορά της αντικατάστασης του s_k από το z_k .

Όσον αφορά την επιλογή των αρχικών πόλων, με βάση την επιλογή τους που αντιστοιχεί στον VF, και μετασχηματίζοντάς τους στο πεδίο z , έχουμε

$$q_j^z = \rho e^{j\theta_j}, \quad \theta_j = \frac{j\pi}{m+1}, \quad j = -m, \dots, -1, 1, \dots, m,$$

με το ρ να είναι ελαφρώς μικρότερο από τη μονάδα. Όπως και στον κλασικό VF, οι ασταθείς πόλοι που προκύπτουν από το pole relocation βήμα του αλγορίθμου, θα βρίσκονται εκτός μοναδιαίου κύκλου. Αυτοί οι πόλοι μετακινούνται στο εσωτερικό του κύκλου μέσω της σχέσης

$$q_j \leftarrow (q_j^*)^{-1},$$

η οποία διατηρεί τη γωνία των πόλων και αντικαθιστά το πλάτος τους με το αντίστροφό του. Στην περίπτωση που ένα μοντέλο έχει μονό αριθμό πόλων n , επιλέγονται $\mu = 2(n - 1)$ ζευγάρια συζυγών με τον παραπάνω τρόπο, και ένας πραγματικός ευσταθής πόλος επιπλέον.

4 Μοντελοποίηση Πλάτους

Στο παρόν κεφάλαιο ασχολούμαστε με την παραγωγή μιας ακολουθίας φάσης, η οποία θα καθιστά την λειτουργία του Vector Fitting επιτυχή. Η μοντελοποίηση ενός συστήματος με βάση το πλάτος της απόκρισής του περιλαμβάνει την δέσμευση του πλάτους του, και έπειτα τον συνδυασμό του πλάτους αυτού με μια ακολουθία φάσης, αυθαίρετη, τέτοια ώστε να προκύψουν ικανοποιητικά αποτελέσματα.

4.1 Εντοπισμός Προβλήματος

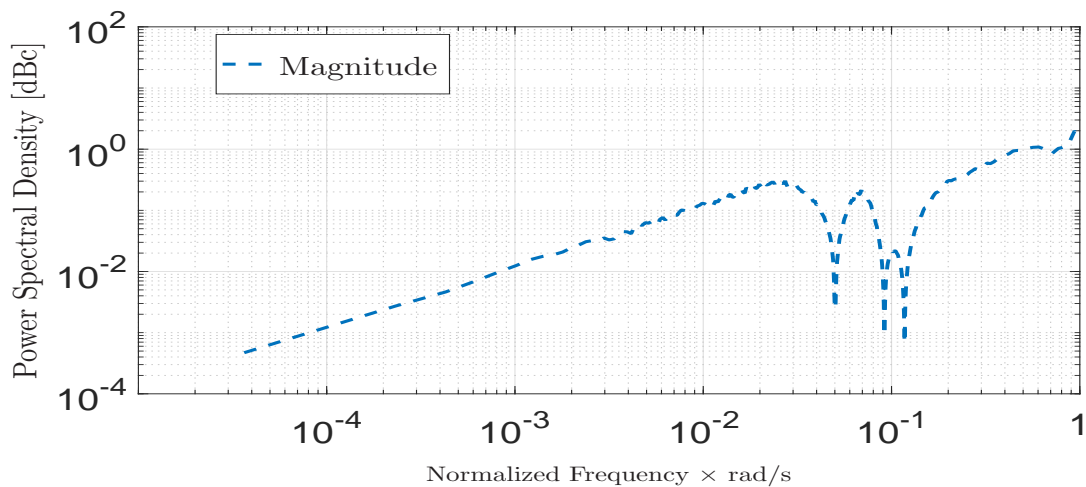
Αρχικά, η προσομοίωση ενός Σ - Δ διαμορφωτή μας δίνει ένα αριθμό από δείγματα εξόδου. Τα δείγματα εξόδου τα χρησιμοποιούμε για να αποκτήσουμε μια εκτίμηση για την πυκνότητα του φάσματος ισχύος της εξόδου του διαμορφωτή. Βασίζομενοι στην υπόθεση ότι η είσοδος του ισοδύναμου κυκλώματος θορύβου του MSLA διαμορφωτή είναι λευκός θόρυβος, όπως και στους απλούς Σ - Δ διαμορφωτές, και σύμφωνα με τη θεωρία για τη σχέση της φασματικής πυκνότητας ισχύος της εισόδου και της εξόδου ενός γραμμικού συστήματος [16], μπορούμε να καταλήξουμε στο

$$S_y = |H(e^{j\omega})|^2 S_n, \quad (88)$$

όπου y η έξοδος του διαμορφωτή και n ο λευκός θόρυβος εισόδου. Επιπλέον, θεωρώντας ότι ο λευκός θόρυβος έχει διακύμανση $\sigma_n^2 = 1$, καταλήγουμε στη σχέση

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{S_y}. \quad (89)$$

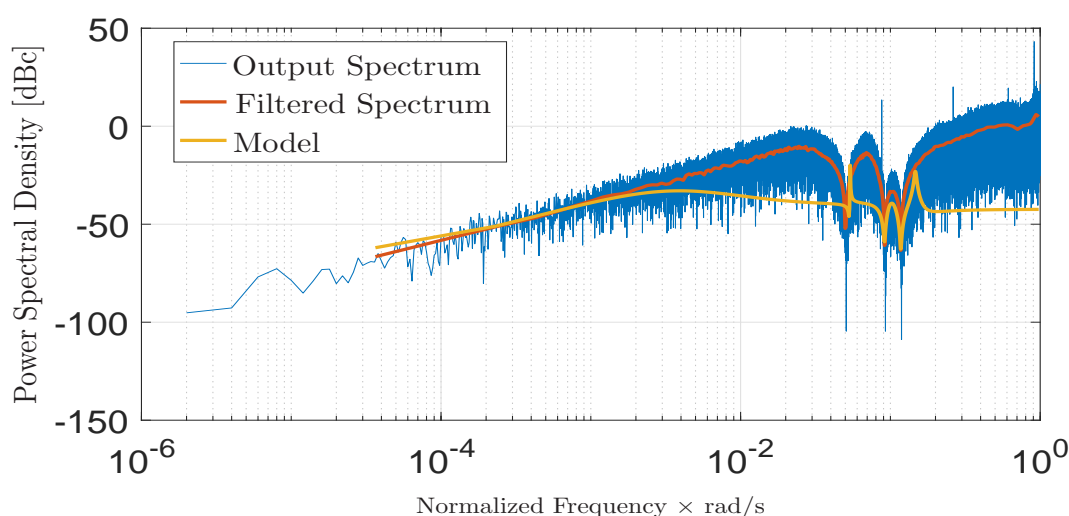
Δηλαδή μια εκτίμηση για την απόκριση του πλάτους της NTF του διαμορφωτή μπορεί να βρεθεί μέσω της πυκνότητας φασματικής ισχύος της εξόδου του. Τα δεδομένα για το πλάτος του διαμορφωτή προς μοντελοποίηση λαμβάνονται με την παραπάνω μέθοδο, και επιπλέον φιλτράρονται για να αποκτήσουν μια συνεχή μορφή και να σβηστούν οι οποιαδήποτε spurs. Στην παρακάτω ανάλυση, προσομοιώνουμε έναν Σ - Δ MSLA διαμορφωτή με $OSR = 8$ και $k = 4$ look-ahead steps. Τα δεδομένα του πλάτους που προκύπτουν φαίνονται στο σχήμα 11.



Σχήμα 11: Το πλάτος των συχνοτηκών δεδομένων, για το Σ - Δ MSLA διαμορφωτή.

Όπως έχει αναλυθεί και στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι αλγόριθμοι μοντελοποίησης ζητούν ως εισόδους συχνοτικά δείγματα από το συστήματα προς μοντελοποίηση. Για την μοντελοποίηση του συστήματος με βάση το πλάτος του, χρησιμοποιούμε το πλάτος που αποκτήσαμε από την προηγούμενη διαδικασία και το συνδυάζουμε με μια αυθαίρετη φάση, ώστε να προκύψει συχνοτικά δεδομένα, τα οποία μπορούν να μπου σαν είσοδο στον Vector Fitting.

Η πρώτη προσπάθεια γίνεται με ακολουθίες φάσης που είναι σταθερές, π.χ. $\phi(\omega) = 0$. Η συχνοτική απόκριση που προκύπτει είναι ένα σύνολο από πραγματικούς αριθμούς οι οποίοι οδηγούνται σαν είσοδοι στον Vector Fitting. Στο σχήμα 12 συγκρίνονται οι αποκρίσεις του πραγματικού συστήματος και του μοντέλου που προκύπτει. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει ακρίβεια στη μέθοδο, όταν χρησιμοποιούμε σταθερές φάσεις.



Σχήμα 12: Η ανακρίβεια των αποτελεσμάτων του fitting αλγόριθμου για σταθερή γωνία.

Η επόμενη λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε ακολουθίες φάσης οι οποίες είναι μεταβάλλονται γραμμικά με τη συχνότητα, δηλαδή $\phi(f) = \alpha f + \beta$. Η επιλογή αυτή επίσης δεν οδηγεί στα επιθυμητά αποτελέσματα.

4.2 Η Χιλμπερτιανή σχέση πλάτους και φάσης

Στα παρακάτω θεωρούμε ως $y[n]$ την ακολουθία εξόδου του διαμορφωτή MSLA του σχήματος 12. Είναι δυνατό να βρούμε μια χιλμπερτιανή σχέση μεταξύ του μέτρου και της φάσης του φουριεριανού μετασχηματισμού της $y[n]$, αν επιβάλλουμε αιτιότητα σε κάθε ακολουθία $\hat{y}[n]$ που προκύπτει από την $y[n]$ για την οποία το φουριεριανό μετασχημάτισμα είναι $\hat{Y}(e^{j\omega})$ είναι ο λογάριθμος του φουριεριανού μετασχη-

ματισμού της $y[n]$. Συγκεκριμένα,

$$y[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = |Y(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})]},$$

$$\hat{y}[n] \leftrightarrow \hat{Y}(e^{j\omega})$$

$$\hat{Y}(e^{j\omega}) = \log[X(e^{j\omega})] = \log|Y(e^{j\omega})| + j \arg[Y(e^{j\omega})].$$

Το $\arg[Y(e^{j\omega})]$ παριστάνει τη συνεχή φάση της $Y(e^{j\omega})$. Η ακολουθία $\hat{y}[n]$ ονομάζεται μιγαδικό ανάφασμα (complex cepstrum) της $y[n]$ και θα αναλύσουμε τις ιδιότητές της παρακάτω.

Όταν η $\hat{y}[n]$ είναι αιτιατή, τότε το πραγματικό και το μιγαδικό μέρος της $\hat{Y}(e^{j\omega})$ συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\arg[Y(e^{j\omega})] = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} \log|Y(e^{j\theta})| \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta, \quad (90)$$

$$\log|Y(e^{j\omega})| = \hat{y}[0] + \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\pi}^{\pi} \arg[Y(e^{j\theta})] \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta. \quad (91)$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι η συνθήκη της αιτιότητας για το μιγαδικό ανάφασμα ταυτίζεται με τη συνθήκη ελάχιστης φάσης για τη $Y(e^{j\omega})$, δηλαδή όλοι οι πόλοι και τα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

4.3 Το μιγαδικό και το πραγματικό ανάφασμα

Θα προχωρήσουμε στον ορισμό του μιγαδικού και του πραγματικού αναφάσματος μιας ακολουθίας $y[n]$. Θεωρούμε ότι η ακολουθία $y[n]$ είναι ευσταθής και υπάρχει z μετασχηματισμός για αυτή. Το μιγαδικό ανάφασμα της $y[n]$ ορίζεται σαν την ακολουθία $\hat{y}[n]$ της οποίας το z μετασχημάτισμα είναι το [17]

$$\hat{Y}(z) = \log[X(z)]. \quad (92)$$

Συνήθως χρησιμοποιείται εκθετική βάση για τον λογάριθμο. Ο λογάριθμος της μιγαδικής ποσότητας ισούται με

$$\log[Y(z)] = \log[|Y(z)| e^{j\angle X(z)}] = \log|X(z)| + j\angle X(z).$$

Το πραγματικό ανάφασμα μιας ακολουθίας προκύπτει ουσιαστικά μόνο από το μέτρο του φουριεριανού μετασχηματισμάτος της. Αρχικά, ορίζουμε την ποσότητα

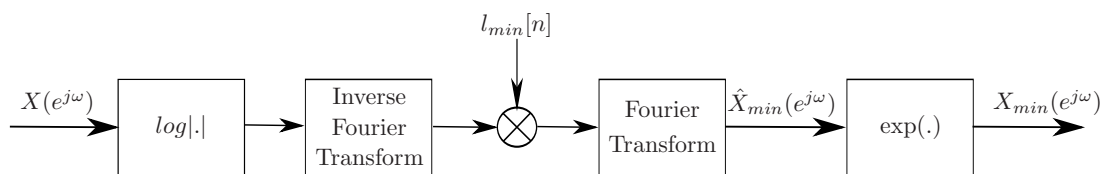
$$C_y(e^{j\omega}) = \log|Y(e^{j\omega})|.$$

Μπορούμε να ορίσουμε το μιγαδικό ανάφασμα ως το αντίστροφο μετασχημάτισμα Fourier του $C_y(e^{j\omega})$,

$$c_y[n] = \mathcal{F}^{-1}(C_y(e^{j\omega})). \quad (93)$$

Οποιαδήποτε ακολουθία $x[n]$ για την οποία υπάρχει το μιγαδικό ανάφασμα μπορεί να εκφραστεί σαν συνέλιξη μιας ακολουθίας ελάχιστης φάσης και μιάς ολοπερατής ακολουθίας, δηλαδή

$$x[n] = x_{min}[n] \star x_{ap}[n],$$



Σχήμα 13: Minimum phase and all pass deconvolution method

όπου x_{min}, x_{ap} δηλώνουν την συνιστώσα ελάχιστης φάσης και την ολοπερατή συνιστώσα. Αν η $x[n]$ δεν είναι ελάχιστης φάσης, τότε το σύστημα στο σχήμα 13 με είσοδο $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}(x[n])$ παράγει το μιγαδικό ανάφασμα της ακολουθίας ελάχιστης φάσης η οποία έχει το ίδιο μέτρο φουριεριανού μετασχηματισματος με την $x[n]$ [18]. Να σημειωθεί ότι το l_{min} ορίζεται όπως και στη σχέση

$$l_{min}[n] = 2u[n] - \delta[n] = \begin{cases} 2, & \text{αν } n > 1 \\ 1, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n < 0 \end{cases} \quad (94)$$

Η βασική ιδέα της τεχνικής αποσυνέλιξης (minimum-phase and allpass deconvolution) φαίνεται στις παρακάτω σχέσεις, ξεκινώντας από

$$X(e^{j\omega}) = X_{min}(e^{j\omega})X_{ap}(e^{j\omega}), \quad (95)$$

όπου βάζουμε μέτρα και υπολογίζουμε

$$|X(e^{j\omega})| = |X_{min}(e^{j\omega})| \cdot |X_{ap}(e^{j\omega})|.$$

Όμως, επειδή οι ολοπερατές ακολουθίες έχουν φουριεριανά μετασχηματίσματα που έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα στο σύνολο των συχνοτήτων, παίρνουμε

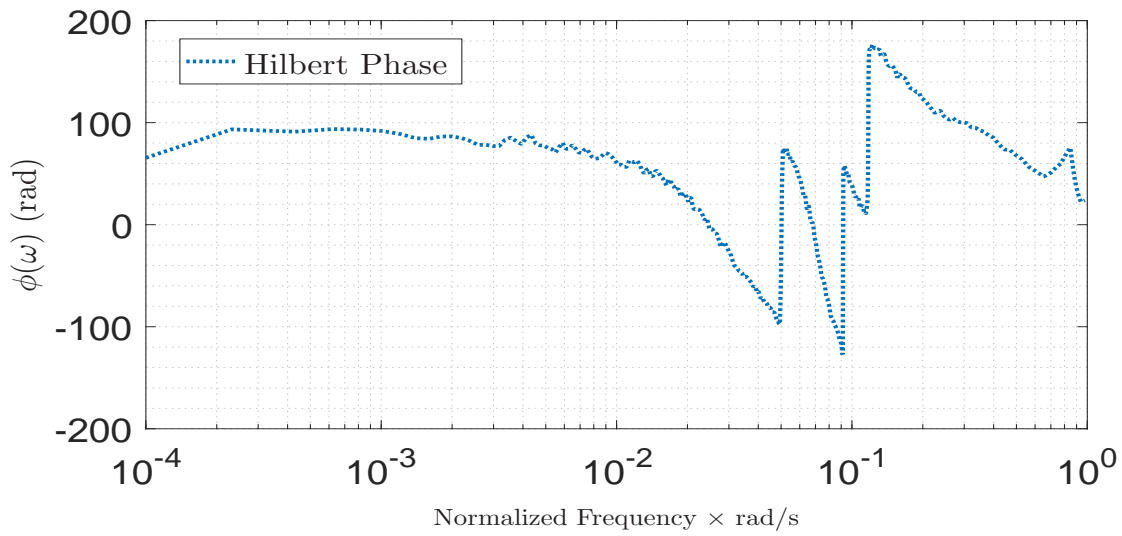
$$|X(e^{j\omega})| = |X_{min}(e^{j\omega})|. \quad (96)$$

Από το σχήμα 13 προκύπτει επίσης ότι

$$\angle X_{min}(e^{j\omega}) = \mathcal{I}m\{\hat{X}_{min}(e^{j\omega})\}. \quad (97)$$

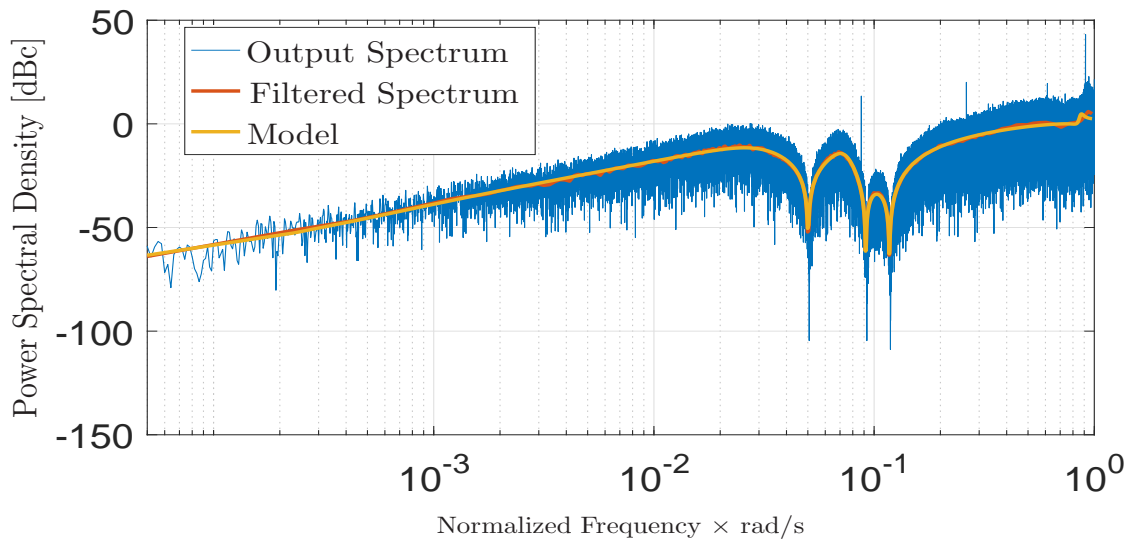
Η έξοδος, $X_{min}(e^{j\omega})$ του συστήματος παρουσιάζει το ίδιο πλάτος με την είσοδο $X(e^{j\omega})$, και μια μη μηδενική ακολουθία γωνίας. Συγκεκριμένα, η γωνία είναι τέτοια που καθιστά την ακολουθία εξόδου ελάχιστης φάσης και ταυτίζεται με το αποτέλεσμα που δίνει η χιλμπερτιανή σχέση πλάτους - φάσης της εξίσωσης 91.

Αναφορικά με το παράδειγμα με το MSLA διαμορφωτή της προηγούμενης παραγράφου, η ακολουθία φάσης που προκύπτει για το πλάτος της απόκρισης της NTF του διαμορφωτή φαίνεται στην εικόνα 14. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία φάσης των συχνοτικών δεδομένων που προκύπτουν δεν παρουσιάζει τυχαιότητες, αλλά ακολουθεί τις διακυμάνσεις του πλάτους στην εικόνα 11 στις ίδιες συχνότητες.



Σχήμα 14: Ακολουθία φάσης που προκύπτει από το minim-phase and all-pass deconvolution

Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι τα συχνοτικά δεδομένα X_{min} τα οποία περιέχουν το επιθυμητό πλάτος σε συνδυασμό με μια ακολουθία φάσης. Τα δεδομένα αυτά εισάγονται σαν είσοδο στον αλγόριθμο Vector Fitting και τα αποτελέσματα που λαμβάνονται είναι ικανοποιητικά. Στο σχήμα 15 φαίνονται οι αποκρίσεις του αρχικού συστήματος και του μοντέλου από τον Vector Fitting.



Σχήμα 15: Σωστό αποτέλεσμα του αλγόριθμου VF, όταν το dataset περιέχει γωνία που προκύπτει από το minimum phase and all-pass deconvolution.

5 Μοντελοποίηση Πλάτους στους Multi-Step Look-Ahead Σ-Δ διαμορφωτές

5.1 Επισκόπηση της Μεθόδου Μοντελοποίησης Πλάτους

Αρχικά, κάνουμε μια επισκόπηση της μεθόδου που προτείνεται. Τα επιμέρους τμήματα της μεθόδου έχουν αναλυθεί σε προηγούμενα κεφάλαια.

Στο πρώτο σκέλος της μεθόδου, πρέπει να αποκτήσουμε δεδομένα για το σύστημα προς μοντελοποίηση. Τα δεδομένα αυτά μπορεί να είναι διαθέσιμα είτε από πραγματική λειτουργία του συστήματος, είτε μέσω προσομοίωσής του. Δεδομένα στο πεδίο του χρόνου μετασχηματίζονται στο πεδίο της συχνότητας μέσω του αλγόριθμου περικοπής, που δίνει μια εκτίμηση για την φασματική πυκνότητα ισχύος.

Τα δεδομένα που προκύπτουν, έστω D_k , $k = 1 \dots N$, είναι πολλά σε πλήθος και παρουσιάζουν έντονες διακυμάνσεις. Για αυτό τον λόγο προχωρούμε σε μια διαδικασία φιλτραρίσματος των δεδομένων, για να περιοριστούν τα spikes και να γίνουν οι πληροφορίες όσο πιο ομαλές γίνεται.

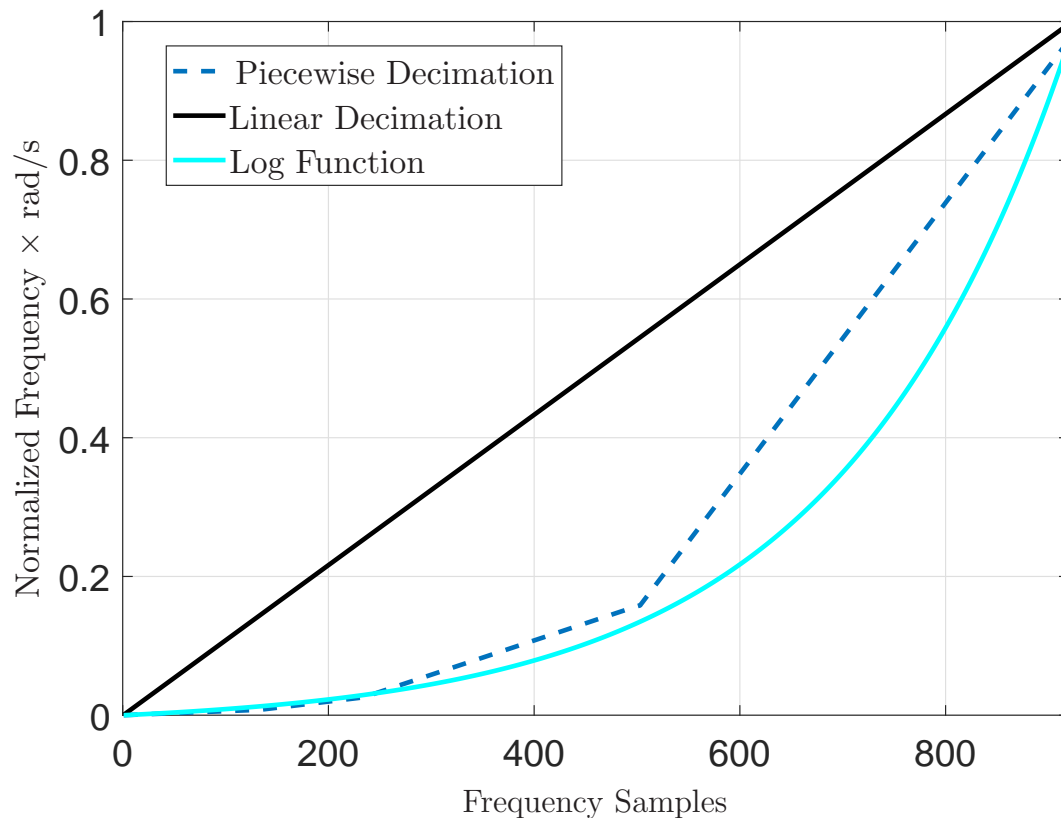
Συγκεκριμένα, πραγματοποιούμε ένα χαμηλοδιαβατό φίλτρο που κόβει τις έντονες διακυμάνσεις μαζί με την εφαρμογή ενός decimation φίλτρου στο πεδίο της συχνότητας. Το decimation φίλτρο λειτουργεί έτσι ώστε να κρατά ένα ανά λ συχνοτικά δείγματα, μειώνοντας το μέγεθος των datasets. Η χρήση του έχει δύο λειτουργίες. Αφενός, η ακολουθία με τα δεδομένα γίνεται πιο ομαλή, και αφετέρου, ο μικρός αριθμός δεδομένων οδηγεί σε γρήγορη επίλυση των προβλημάτων ελαχίστων τετραγώνων και ελάχιστη απαίτηση για υπολογιστικούς πόρους [19].

Η εφαρμογή του decimation φίλτρου μπορεί να είναι γραμμική είτε λογαριθμική. Στην πρώτη περίπτωση, κρατείται ένα δείγμα ανά λ αρχικά δείγματα, για το σύνολο του εύρους συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει. Αυτό συνήθως οδηγεί σε ελλιπή πληροφορία για τις χαμηλές συχνότητες και υπερβολικά πολλά δείγματα για τις υψηλές. Ο αλγόριθμος σύγκλισης θα τείνει να εφαρμόσει το μοντέλο στις μεγαλύτερες συχνότητες, αντί στις χαμηλές. Επίσης, σε εφαρμογές όπως τους διαμορφωτές Σ-Δ, οι χαμηλές συχνότητες έχουν το σύνολο της δυναμικής του συστήματος και έτσι η μοντελοποίηση δεν είναι ικανοποιητική.

Η λογαριθμική υλοποίηση του φίλτρου είναι αποτελεσματική. Η βασική ιδέα της είναι ότι το σύνολο των συχνοτήτων χωρίζεται σε m υπομήματα, σε καθένα από το οποία εφαρμόζεται το φίλτρο decimation με διαφορετικό παράγοντα $\lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_m$. Μια τυπική επιλογή για το m είναι 4, ενώ οι παράγοντες λ επιλέγονται έτσι ώστε η κατανομή των δειγμάτων των συχνοτήτων ανά κανονικοποιημένες συχνότητες μοιάζει με λογαριθμική συνάρτηση. Στην περίπτωση του MSLA διαμορφωτή τα όρια των υπομημάτων επιλέχθηκαν να βρίσκονται στις θέσεις

$$m_k = (OSR)^{\frac{k}{m-1}-1}, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Οι παράγοντες λ , λοιπόν, μπορούν να υπολογιστούν μέσω αναλυτικής γεωμετρίας έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα που προκύπτουν ανά υπομήμα να έχουν κοινές αρχές και τέλη, όπως στο σχήμα 16.

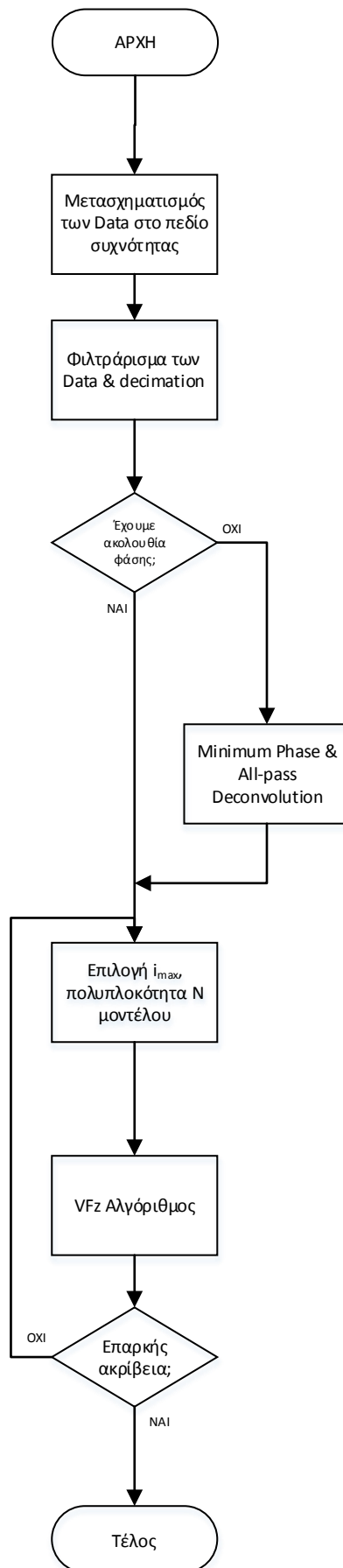


Σχήμα 16: Η κατανομή των δειγμάτων ανά τιμές κανονικοποιημένης κυκλικής συχνότητας.

Μετά το φιλτράρισμα των δεδομένων, τα τροφοδοτούμε στον αλγόριθμο αποσυνέλιξης που μας παρέχει συχνотικά δεδομένα με γωνία τέτοια, ώστε το σύστημα που αντιστοιχεί σε αυτά να είναι ελάχιστης φάσης. Η μέθοδος minimum-phase and all-pass deconvolution είναι απαραίτητη για να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα ο αλγόριθμος μοντελοποίησης Vector Fitting, όπως έχουμε εξηγήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Το επόμενο βήμα είναι η επιλογή του αριθμού των μέγιστων επαναλήψεων και της πολυπλοκότητας του μοντέλου. Ο αριθμός των επαναλήψεων μπορεί να τεθεί σε μια θεωρητικά μεγάλη τιμή σε περίπτωση που η ταχύτητα δεν είναι το ζητούμενο. Η πολυπλοκότητα του μοντέλου αποτελεί μια σημαντική παράμετρο για την ακρίβεια της διαδικασίας. Μεγάλη πολυπλοκότητα μπορεί να οδηγήσει από χρησιμοποίηση πολλών υπολογιστικών πόρων μέχρι και σε ανακρίβεια, ενώ η μικρή πολυπλοκότητα οδηγεί σε ανακρίβεια. Στην περίπτωση του MSLA διαμορφωτή, η πολυπλοκότητα του μοντέλου επιλέγεται κοντά σε αυτή του φίλτρου συγκριτή του διαμορφωτή.

Τα δεδομένα πλέον εισέρχονται στον αλγόριθμο Vector Fitting διακριτού χρόνου. Το μοντέλο που προκύπτει όταν οι επαναλήψεις περατωθούν συγκρίνεται με τα αρχικά δεδομένα, τα οποία όμως έχουν υποστεί φιλτράρισμα. Σε περίπτωση που η ακρίβεια δεν είναι αυτή που θέλουμε, επαναλαμβάνουμε την διαδικασία με διαφορετικό μέγιστο αριθμό επαναλήψεων ή μεγαλύτερη πολυπλοκότητα του μοντέλου. Τα παραπάνω αναλύονται και στο διάγραμμα ροής του σχήματος 17.



Σχήμα 17: Διάγραμμα ροής που περιγράφει τη μέθοδο μοντελοποίησης πλάτους.

5.2 Αποτελέσματα Προσομοίωσης

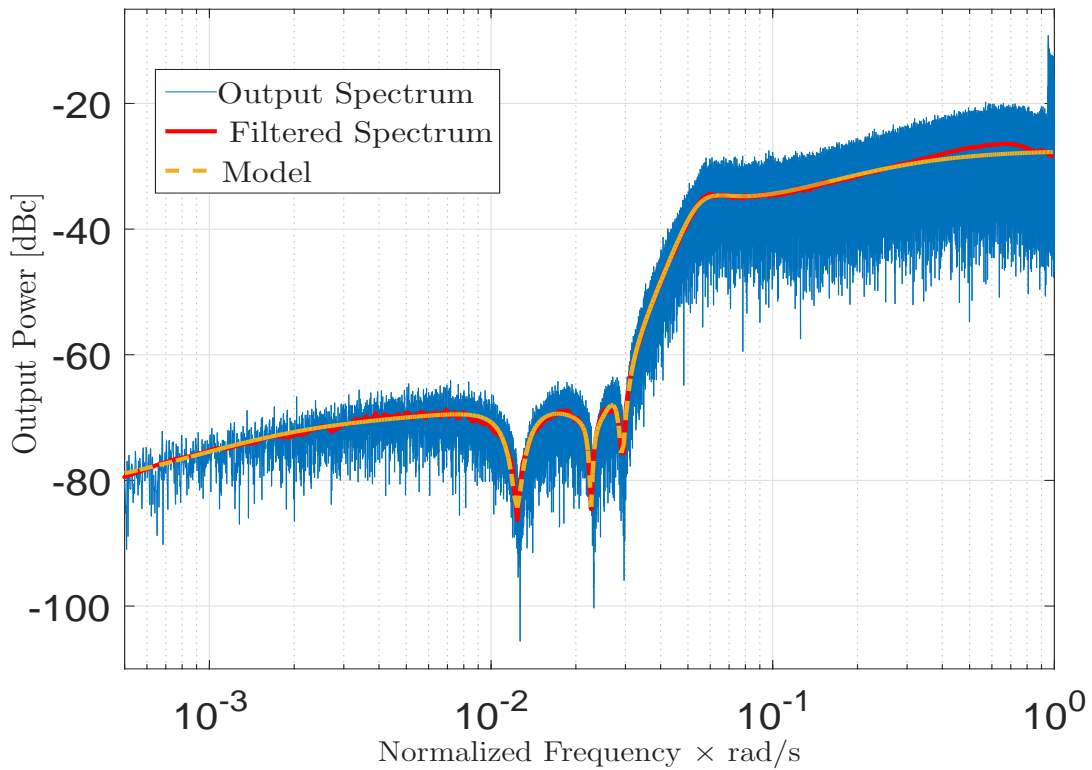
Παρακάτω παρουσιάζονται παραδείγματα εφαρμογής της μοντελοποίησης πλάτους για διαμορφωτές Σ - Δ και MSLA Σ - Δ και επιδεικνύεται η ακρίβεια της.

5.2.1 Κλασσικός Σ - Δ διαμορφωτής

Για ορισμένες εφαρμογές οι κλασσικοί Σ - Δ διαμορφωτές χρειάζονται μοντελοποίηση. Η ανάγκη για model order reduction και για identification μπορεί να οδηγήσει στην μοντελοποίηση τους. Στην περίπτωση μας, μοντελοποιούμε έναν ψηφιακό, χαμηλοπερατό διαμορφωτή Σ - Δ .

Για την προσομοίωση του πραγματικού συστήματος χρησιμοποιούμε το Sigma-Delta Toolbox [20] του περιβάλλοντος Matlab, χρησιμοποιώντας παραμέτρους $OSR = 32$, φίλτρο βαθμού 7, $NTF(\infty) = 2$ και με χρήση βέλτιστων μηδενικών. Η είσοδος του διαμορφωτή είναι ημιτονική, με πλάτος $A = 0.1$. Το μοντέλο που παρουσιάζουμε είναι βαθμού 9 και χρησιμοποιήθηκε ένα σύνολο από $N_s = 700$ συχνοτικά δείγματα με μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 25.

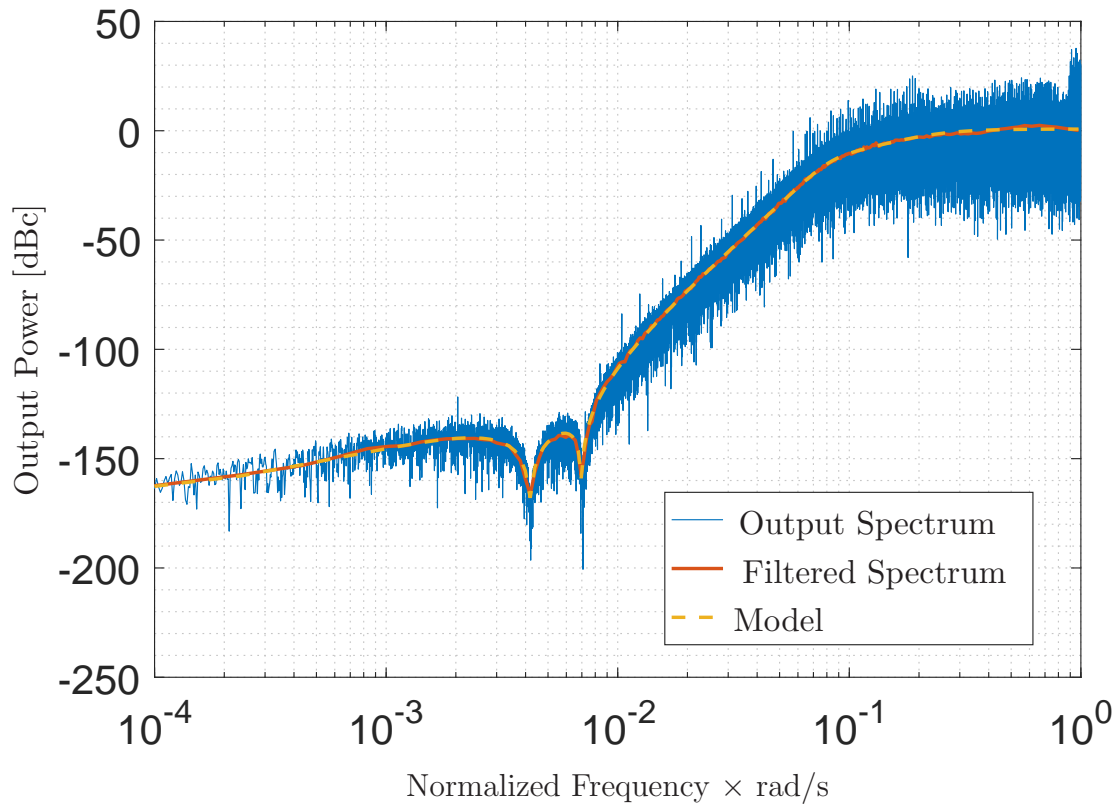
Στο σχήμα 18 φαίνονται οι φασματικές πυκνότητες ισχύος των εξόδων του αρχικού συστήματος και του μοντέλου, όταν αυτό διεγείρεται από μια είσοδο λευκού θορύβου με μοναδιαία διακύμανση. Παρατηρούμε ότι υπάρχει πολύ καλή ακρίβεια μεταξύ τους, και οι δυναμική του διαμορφωτή στις χαμηλές συχνότητες, όπου βρίσκονται τα μηδενικά του, μοντελοποιείται πλήρως.



Σχήμα 18: Σύγκριση των φασματικών πυκνότητων ισχύος για Σ - Δ διαμορφωτή.

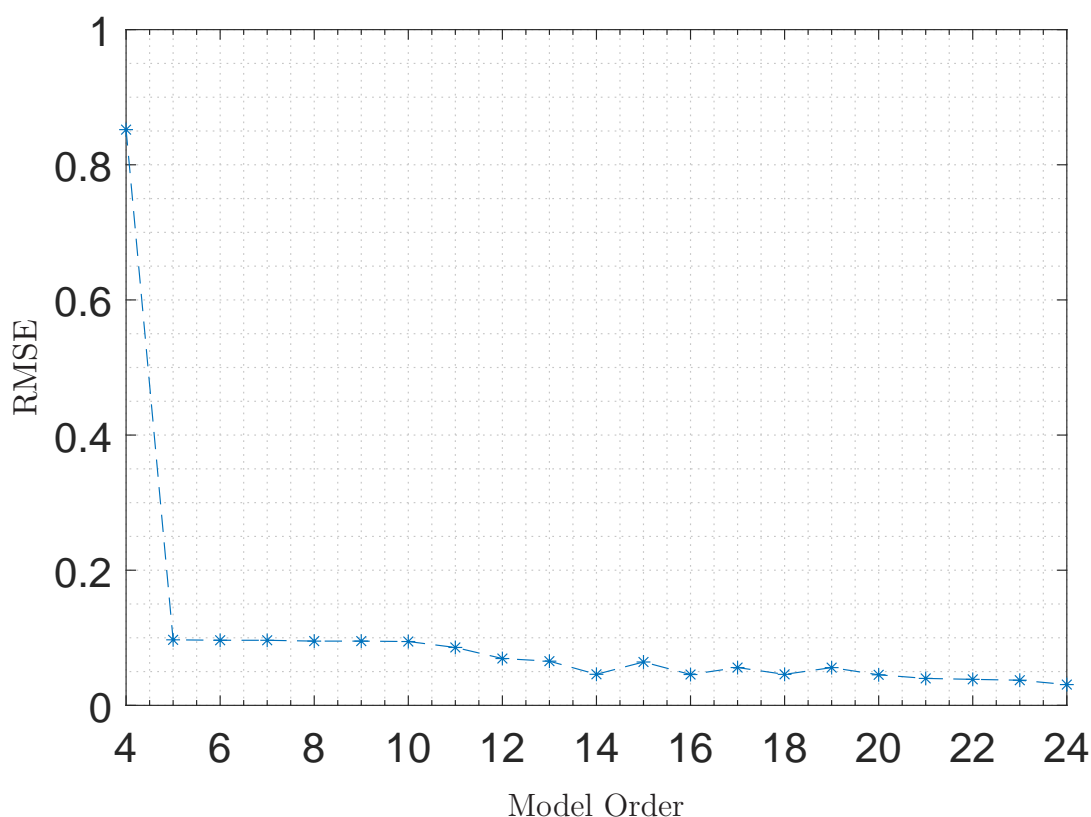
5.2.2 MSLA Σ-Δ διαμορφωτές

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε την εφαρμογή της μεθόδου μοντελοποίησης πλάτους σε διαμορφωτές MSLA. Συγκεκριμένα, θεωρούμε μια υλοποίηση του διαμορφωτή MSLA με $k = r = 3$ Look-Ahead steps και βαθμό φίλτρου 5. Η NTF του συγκριτή διαμορφωτή που αποτελεί βάση για τον MSLA υλοποιείται μέσω του Delta-Sigma Toolbox, με παραμέτρους $OSR = 128$, $NTF(\infty) = 1.6$ και χρήση βέλτιστων μηδενικών. Στο σχήμα 19 βλέπουμε τη σύγκριση των φασματικών πυκνοτήτων ισχύος μεταξύ του πραγματικού συστήματος και του μοντέλου του, με βαθμό 7.



Σχήμα 19: Σύγκριση των φασματικών πυκνοτήτων ισχύος για τον MSLA διαμορφωτή, με μοντέλο βαθμού 7.

Παρατηρούμε ότι η ακρίβεια του μοντέλου είναι πολύ καλή, με δεδομένο ότι η πολυπλοκότητά του είναι ίδια με αυτή του φίλτρου του διαμορφωτή. Η χρήση μοντέλων με μεγαλύτερη πολυπλοκότητα μπορεί να οδηγήσει σε ακόμα καλύτερη ακρίβεια, η οποία όμως μπορεί να μην είναι ικανοποιητική για την περαιτέρω πολυπλοκότητα που εισάγεται.



Σχήμα 20: Μέσο τετραγωνικό σφάλμα μοντελοποίησης για έναν διαμορφωτή MSLA, για μοντέλα με διαφορετική πολυπλοκότητα.

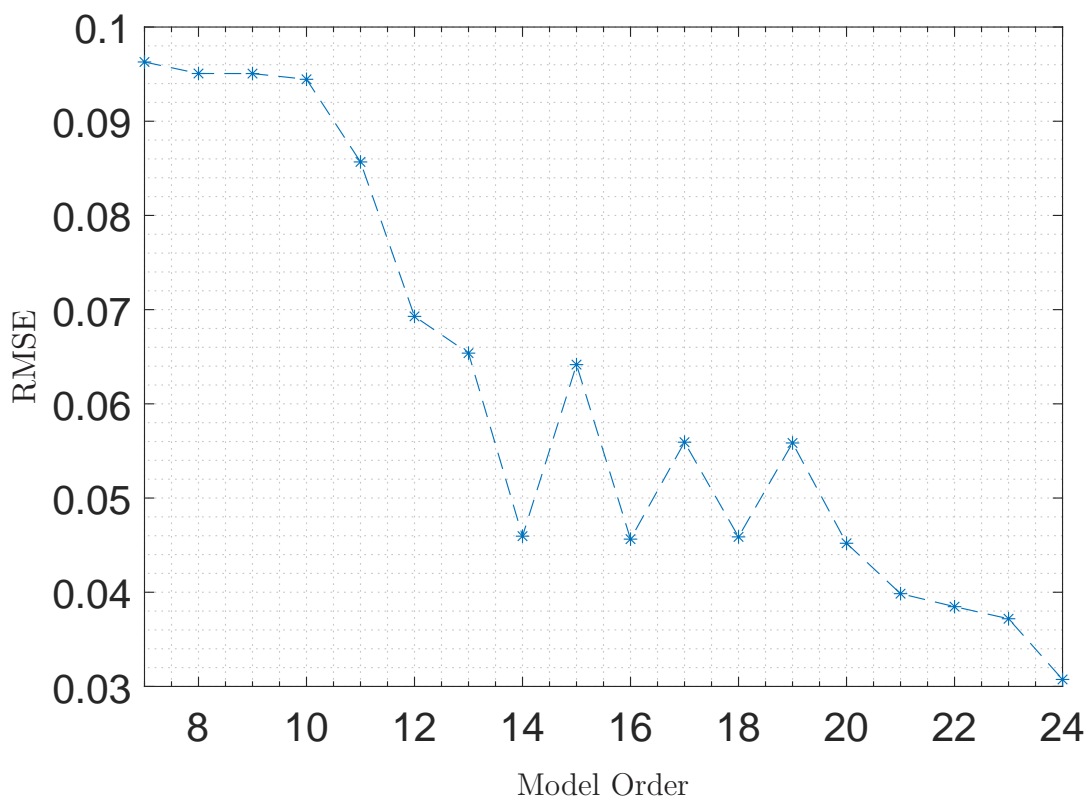
Για τον λόγο αυτό, μοντελοποιούμε το ίδιο σύστημα με μοντέλα ιαφορετικής πολυπλοκότητας και υπολογίζουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα που προκύπτει για κάθε μοντέλο. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 20.

Είναι φανερό ότι για μοντέλα πολυπλοκότητα πάνω από 5, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα περιορίζεται και φαίνεται σχεδόν σταθερό. Μια πιο κοντινή ματιά στα σφάλματα των μοντέλων μεγαλύτερης πολυπλοκότητας δείχνει ότι η ακρίβεια των μοντέλων βελτιώνεται καθώς η πολυπλοκότητά τους μεγαλώνει, όπως φαίνεται στο σχήμα 21. Συγκεκριμένα, για μοντέλα βαθμού από 15 έως και 20 παρατηρούμε μιας μορφής ταλάντωση για το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, το οποίο οφείλεται στο ότι ο αλγόριθμος Vector Fitting δεν συγκλίνει σε ένα ολικό ελάχιστο, όταν περιέχονται στα δεδομένα θόρυβοι και ανακρίβειες από τα `spurs` που δεν κόπηκαν κατά το φιλτράρισμα [21],[22].

Η ακρίβεια της μεθόδου, στην περίπτωση του MSLA διαμορφωτή, θα βελτιώνεται καθώς αυξάνεται η πολυπλοκότητα του μοντέλου, επειδή οι διακυμάνσεις που δεν φιλτράρονται και συνεισφέρουν στο μέσο τετραγωνικό σφάλμα θα μοντελοποιούνται, μαζί με τις δυναμικές του συστήματος. Φυσικά, είναι στην ευχέρεια του χρήστη να επιλέξει τον βαθμό του μοντέλου που επιθυμεί, ανάλογα με την ανάγκη του για ελαχιστοποίηση της πολυπλοκότητας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση όπου η πολυπλοκότητα του μοντέλου N είναι μικρότερη από αυτή του πραγματικού συστήματος, ο αλγόριθμος Vector Fitting, όντας μια διαδικασία GSK, ελαχιστοποιεί το σφάλμα μεταξύ των δεδομένων και του

μοντέλου, ενώ παράλληλα εξασφαλίζει ότι η L_2 νόρμα του σφάλματος έχει άνω φράγμα τις ιδιάζουσες τιμές Hankel του μοντέλου με βαθμό $N + 1$. Αυτό σημαίνει ότι η μέθοδος μπορεί να θεωρηθεί ως μια τεχνική για model order reduction για τον διαμορφωτή [23][24].

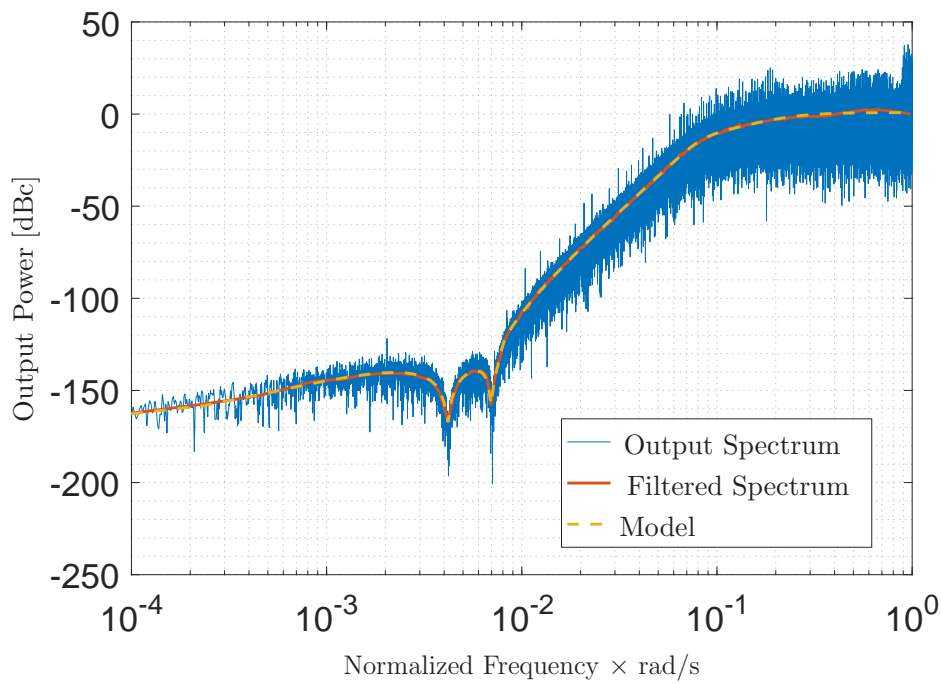


Σχήμα 21: Μέσο τετραγωνικό σφάλμα μοντελοποίησης για έναν διαμορφωτή MSLA, για μοντέλα με πολυπλοκότητα μεγαλύτερη από το φίλτρο του.

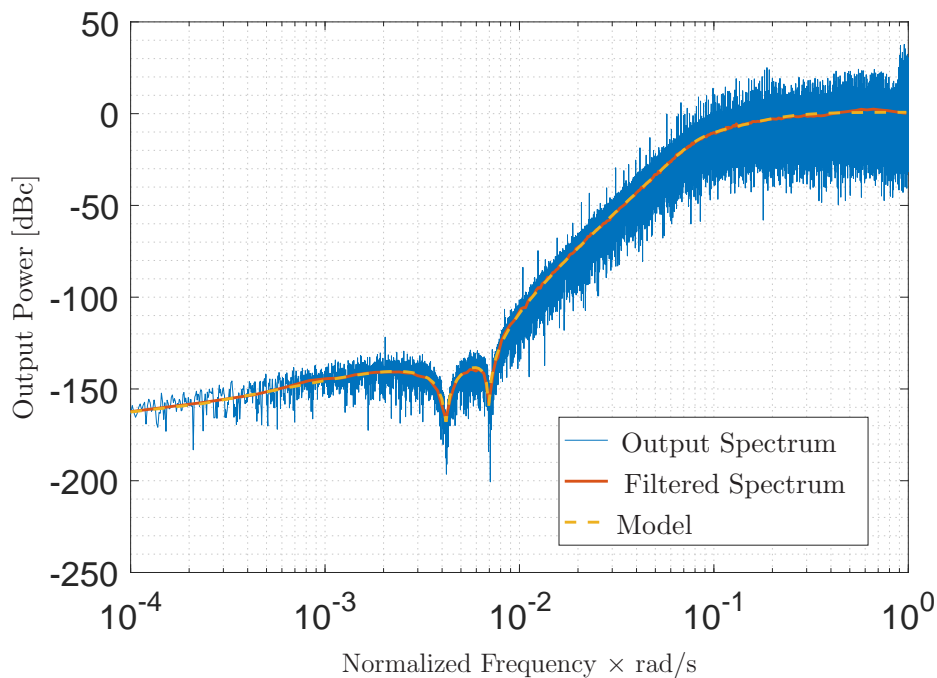
Οι μικρές διακυμάνσεις στην πολυπλοκότητα του μοντέλου δεν οδηγούν σε ορατές αλλαγές στην ακρίβειά του, εάν πρόκειται για μια πολυπλοκότητα ίδια ή μεγαλύτερη από αυτή του φίλτρου του διαμορφωτή. Αυτό φαίνεται στα σχήματα 22 και 23.

Η μοντελοποίηση του MSLA διαμορφωτή με τη μέθοδο μοντελοποίησης πλάτους αποδίδει ικανοποιητικά αποτελέσματα, όσον αφορά την ακρίβεια. Μπορούμε, επιπλέον, να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο μοντελοποίησης πλάτους για να βγάλουμε συμπεράσματα για τη μη γραμμική δυναμική του MSLA διαμορφωτή.

Συγκεκριμένα, εξετάζουμε την επίδραση που έχουν τα Look-Ahead steps στην πολυπλοκότητα του διαμορφωτή. Μοντελοποιούμε τους διαμορφωτές με ίδια χαρακτηριστικά, αλλά διαφορετικά Look-Ahead steps, κάνοντας χρήση μοντέλων ίδιας πολυπλοκότητας. Στο σχήμα 24 φαίνονται τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα των μοντέλων για κάθε υλοποίηση του MSLA διαμορφωτή.



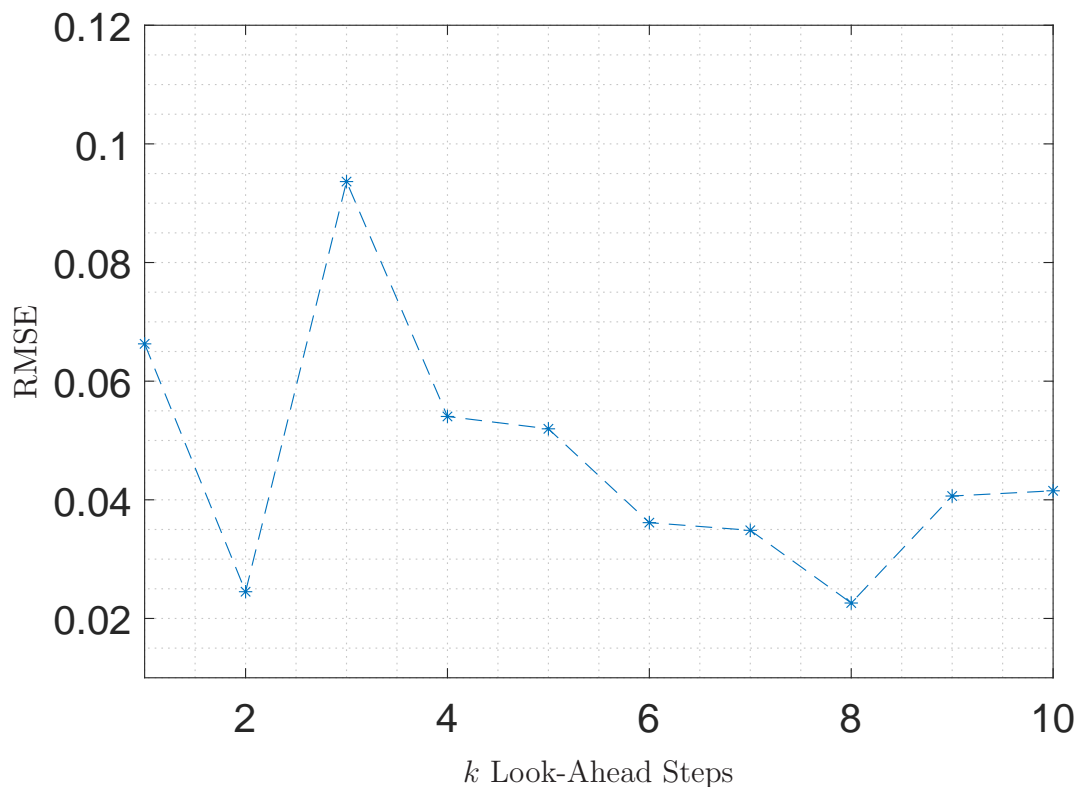
Σχήμα 22: Σύγκριση των φασματικών πυκνότητων ισχύος για τον MSLA διαμορφωτή, με μοντέλο βαθμού 8.



Σχήμα 23: Σύγκριση των φασματικών πυκνότητων ισχύος για τον MSLA διαμορφωτή, με μοντέλο βαθμού 6.

Η βασική πληροφορία που μας δίνει το διάγραμμα είναι η δυσκολία ενός μοντέλου βαθμού 7 να καλύψει τη δυναμική διαμορφωτών για διαφορετικά Look-Ahead steps. Στην περίπτωση που περαιτέρω πολυπλοκότητα εισάγεται, καθώς τα Look-Ahead steps αυξάνονται, τότε το μοντέλο δεν θα μπορεί να την καλύψει, κάτι το οποίο οδηγεί σε αύξηση του σφάλματος μεταξύ μοντέλου και πραγματικού συστήματος.

Στην πραγματικότητα, αυτό που συμβαίνει είναι ότι τα Look-Ahead steps δεν εισάγουν επιπλέον δυναμική στο σύστημα του διαμορφωτή. Το διάγραμμα παρουσιάζει κάποιες διακυμάνσεις, οι οποίες μπορούν να δικαιολογηθούν ως τυχαία σφάλματα τα οποία προκύπτουν από τα spurs που δεν κόπηκαν κατά το φιλτράρισμα.

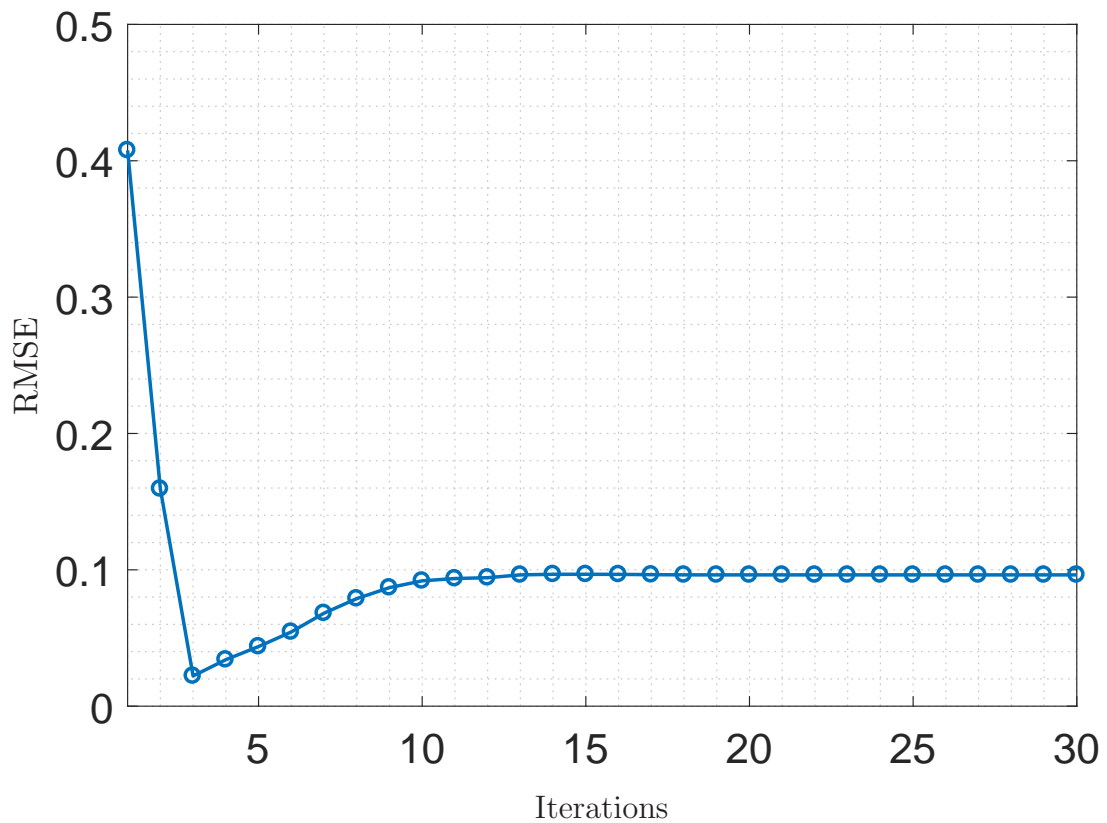


Σχήμα 24: Μέσο τετραγωνικό σφάλμα μοντελοποίησης για διαμορφωτές MSLA με διαφορετικό αριθμό Look-Ahead steps.

Τέλος, ένα επιπλέον στοιχείο που εξετάζουμε κατά την εφαρμογή της μεθόδου στον MSLA διαμορφωτή είναι η ακρίβεια του μοντέλου που προκύπτει καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων ανεβαίνει. Για να εξετάσουμε αυτό το στοιχείο, τρέχουμε τον αλγόριθμο μοντελοποίησης και σε κάθε επανάληψη του VFz υπολογίζουμε το μοντέλο που προκύπτει, καθώς και τη διαφορά της φασματικής πυκνότητας ισχύος του από αυτή του πραγματικού. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 25. Παρατηρούμε ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μειώνεται σχετικά γρήγορα, και έπειτα ανεβαίνει και καταλήγει σε μια σταθερή τιμή.

Ο αριθμός των επαναλήψεων στις οποίες το τετραγωνικό σφάλμα είναι βέλτιστο εξαρτάται από το βαθμό του μοντέλου και τη θέση των αρχικών πόλων. Δεν μπο-

ρούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποιος θα είναι ο βέλτιστος αριθμός. Επίσης, η άνοδος που παρουσιάζεται στο σφάλμα είναι σχετικά μικρή και αποδεκτή. Συνηθισμένη τακτική είναι να θέτουμε έναν μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, ώστε να ξέρουμε ότι σφάλμα θα έχει σταθεροποιηθεί.



Σχήμα 25: Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του μοντέλου, καθώς αυξάνονται οι επαναλήψεις του αλγόριθμου.

6 Συμπερασμάτα και Επεκτάσεις

Στην εργασία προτάθηκε μια νέα μέθοδος μοντελοποίησης ηλεκτρικών και δυναμικών συστημάτων με βάση το πλάτος της συχνότητας τους απόκρισης. Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει πληροφορία σχετικά με τη φάση της απόκρισης του συστήματος, όπως μικροκυματικά συστήματα, και σε περιπτώσεις όπου η μη-γραμμικότητα και πολυπλοκότητα των συστημάτων καθιστά αναποτελεσματικές τις κλασσικές μεθόδους μοντελοποίησης. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν και οι MSLA Σ - Δ διαμορφωτές, των οποίων οι συναρτήσεις μεταφοράς δεν έχουν κλειστή μορφή. Για αυτό τον λόγο, έγινε μοντελοποίηση με βάση το πλάτος της απόκρισής τους και αποκτήσαμε γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα μοντέλα. [25].

Η διαδικασία της μοντελοποίησης των MSLA διαμορφωτών απαιτούσε τη προσομοίωσή τους και το προσεκτικό φιλτράρισμα των συχνωτικών δεδομένων τους. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι ικανοποιητική τόσο στις υψηλές συχνότητες, όσο και στις χαμηλές στις οποίες βρίσκεται η περισσότερη δυναμική του διαμορφωτή, γεγονός που υποδηλώνει τη δυνατότητα της μεθόδου να μοντελοποιεί συστήματα σε μεγάλο εύρος συχνοτήτων.

Ένα επιπλέον σημαντικό χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι η δυνατότητα να μοντελοποιεί συστήματα με πολυπλοκότητες μεγαλύτερες από αυτές των μοντέλων. Το model order reduction μπορεί να είναι χρήσιμο σε εφαρμογές στις οποίες θέλουμε υπολογιστική ταχύτητα και είναι ανάγκη να προσομοιώσουμε ένα πραγματικό σύστημα με όσο το δυνατόν περισσότερη ακρίβεια και λιγότερη πολυπλοκότητα.

Η εργασία που παρουσιάσαμε, όμως, μπορεί να επεκταθεί σε διάφορες πτυχές της. Καταρχάς, η επιλογή του βέλτιστου μοντέλου, η οποία επαφίεται στον χρήστη, πρέπει να γίνεται με μια προκαθορισμένη διαδικασία. Η εφαρμογή των κριτηρίων πληροφορίας του Akaike και του Μπεϋσιανού κριτηρίου πληροφορίας δίνουν λανθασμένες εκτιμήσεις για τη σχέση πολυπλοκότητας και μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Θα πρέπει, επομένως, να βρεθεί μια νέα μέθοδος με την οποία ο χρήστης θα επιλέγει το μοντέλο με την καλύτερη αναλογία ακρίβειας και πολυπλοκότητας.

Η υλοποίηση της μεθόδου έχει γίνει στο περιβάλλον Matlab με εισόδους που προκύπτουν επίσης από προσομοίωση στο Matlab. Για περαιτέρω ταχύτητα και για μοντελοποίηση με χρήση δεδομένων από πραγματικά συστήματα, η υλοποίηση της μεθόδου σε γλώσσα χαμηλού επιπέδου και η δημιουργία πλατφόρμας ώστε να δέχεται σαν δεδομένα, τα δεδομένα από φασματογράφους, θα μπορούσε να είναι μια επιπλέον επέκταση της εργασίας.

Τέλος, όσον αφορά και την εφαρμογή στον MSLA διαμορφωτή, η μέθοδος που προτείνουμε θα πρέπει να επεκταθεί ώστε να μπορεί να αποδώσει ένα γενικευμένο μοντέλο. Συγκεκριμένα, η μοντελοποίηση των MSLA διαμορφωτών γίνεται με βάση τη συχνωτική τους απόκριση. Στην περίπτωση που στις παραμέτρους εισόδου της μεθόδου βάλουμε και το OSR, το βαθμό του φίλτρου του συγκριτή και τον αριθμό των Look-Ahead steps, μια βελτιωμένη έκδοση της μεθόδου θα μπορούσε να βγάλει ένα παραμετρικό μοντέλο το οποίο θα μας δίνει μοντέλα για οποιαδήποτε υλοποίηση των MSLA διαμορφωτών.

Αναφορές

- [1] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hal PTR, 1999.
- [2] P.-E. Su and S. Pamarti, “Fractional- N phase-locked-loop-based frequency synthesis: A tutorial,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 56, no. 12, pp. 881–885, Dec. 2009.
- [3] C. Basetas and P. P. Sotiriadis, “Single-bit-output all-digital frequency synthesis using multi-step look-ahead bandpass Σ - Δ modulator-like quantization processing,” in *IEEE Int. Freq. Contr. Symp. & Europ. Freq. and Time Forum*, Denver, Colorado, Apr. 12–16, 2015, pp. 448–451.
- [4] V. Mladenov, H. Hegt, and A. van Roermund, “Stability analysis of high order sigma-delta modulators,” in *Proc. Europ. Conf. on Circuit Theory and Design - ECCTD’01*, Espoo, Finland, Aug. 28–31, 2001, pp. 313–316.
- [5] R. Schreier and G. C. Temes, *Understanding Delta-Sigma Data Converters*, S. V. Kartalopoulos, Ed. John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [6] C. Basetas, T. Orfanos, and P. P. Sotiriadis, “A class of 1-bit multi-step look-ahead Σ - Δ modulators,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 64, no. 1, pp. 24–37, Jan. 2017.
- [7] C. Basetas, N. Temenos, and P. P. Sotiriadis, “Wide-band frequency synthesis using hardware-efficient band-pass single-bit multi-step look-ahead sigma-delta modulators,” in *IEEE Int. Freq. Control Symp. (IFCS) & Europ. Freq. and Time Forum (EFTF)*, Jul. 10–13, 2017.
- [8] R. Gopalan and O. M. Collins, “An optimization approach to single-bit quantization,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 56, no. 12, pp. 2655–2668, Dec. 2009.
- [9] B. Gustavsen and A. Semlyen, “Rational approximation of frequency domain responses by Vector Fitting,” *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 14, no. 3, pp. 1052–1061, Jul. 1999.
- [10] R. Pintelon and J. Schoukens, *System Identification: A Frequency Domain Approach*, 2nd ed. Wiley, 2012.
- [11] P. Regalia, W.-S. Lu, S.-C. Pei, and C.-C. Tseng, “Comments on ‘a weighted least-squares method for the design of stable 1-d and 2-d iir digital filters’ [with reply],” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, no. 7, pp. 2063–2066, Jul. 1999.
- [12] W. Hendrickx and T. Dhaene, “A discussion of ‘rational approximation of frequency domain responses by vector fitting’,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 21, no. 1, pp. 441–443, Feb. 2006.
- [13] U. L. Rohde, *Microwave and Wireless Synthesizers: Theory and Design*, 1st ed. Wiley-Interscience, 1997.
- [14] S. Grivet-Talocia and B. Gustavsen, *Passive macromodeling*, 1st ed. Wiley, 2016.
- [15] G. F. Franklin, D. J. Powell, and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, 3rd ed. Prentice Hall, 1997.
- [16] S. S. Haykin and M. Moher, *Communication Systems*, 5th ed. J. Wiley, 2009.
- [17] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed. Prentice-Hall, 1999.
- [18] B. Yegnanarayana, D. Saikia, and T. Krishnan, “Significance of group delay functions in signal reconstruction from spectral magnitude or phase,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 32, no. 3, pp. 610–623, Jun. 1984.
- [19] K. Touloupas, C. Basetas, and P. P. Sotiriadis, “Derivation of the transfer functions of 1-bit multi-step look-ahead $\Sigma\Delta$ modulators using system identification methods,” in *6th Int. Conf. on Modern Circuits and Systems Technologies (MOCASST)*, May 4–6,

- 2017.
- [20] R. Schreier. (2011, Dec.) Delta sigma toolbox. [Online]. Available: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19-delta-sigma-toolbox>
 - [21] S. Leftreriou and A. C. Antoulas, “On the convergence of the vector-fitting algorithm,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 61, no. 4, pp. 1435–1443, Apr. 2013.
 - [22] B. Yegnanarayana, D. Saikia, and T. Krishnan, “Improving the convergence of vector fitting for equivalent circuit extraction from noisy frequency responses,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 48, no. 1, pp. 104–120, Feb. 2006.
 - [23] N. Wong and C.-U. Lei, “Iir approximation of fir filters via discrete-time vector fitting,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 65, no. 3, pp. 1296–1302, Mar. 2008.
 - [24] H. Fan and M. Doroslovacki, “On ‘global convergence’ of steiglitz-mcbride adaptive algorithm,” vol. 40, no. 2, pp. 73–87, Feb. 1993.
 - [25] S. H. Ardalan and J. J. Paulos, “An analysis of nonlinear behavior in Delta-Sigma modulators,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 34, no. 6, pp. 593–603, Jun. 1987.